Optimale Steuerung von Differentialgleichungen mit BV-Funktionen

Dominik Hafemeyer, Prof. Dr. Boris Vexler
Technische Universität München, Lehrstuhl für Optimalsteuerung

TopMath
Mathematik mit Promotion
Technische Universität München
Universität Augsburg University
Elitenetzwerk Bayern

Zusammenfassung

Wir betrachten ein Optimalsteuerungsproblem im Raum der Funktionen beschränkter Variation. Die Kostenfunktion enthält einen Halbnormkostenterm, der die totale Variation der Kontrolle "'bestraft"'. Mit den Optimalitätsbedinungen lässt sich zeigen, dass stückweise konstante Funktionen als optimale Steuerungen zu erwarten sind. Mittels einer Regularisierung lässt sich das Problem hinreichend glätten, um einfache Berechnungen durchzuführen.

Problemstellung

Sei $N \in \{1,2,3\}$. Wir betrachten ein Optimalsteuerungsproblem auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ω sei wahlweise ein $C^{1,1}$-Gebiet oder ein konvexes Lipschitzgebiet. Den Rand von Ω bezeichnen wir mit Γ. Der Steuerungsraum ist $BV(\Omega)$ und der Zustandraum $H_0^1(\Omega)$. Wir wählen noch einen Zielzustand $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ und einen Parameter $\beta > 0$. Das Problem lautet

$$\min_{(u,y)\in BV(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} J(u,y) = \frac{1}{2}||y - y_\Omega||^2_{L^2(\Omega)} + \beta |u|_{BV(\Omega)},$$

wobei u und y folgende Nebenbedingungen erfüllen müssen:

$$-\Delta y = u \text{ in } \Omega,$$
$$y|_\Gamma = 0.$$

Lösen der Nebenbedingung

Es gibt einen Lösungsoperator $S : L^{\frac{6}{5}}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ mit

$$-\Delta Su = u$$
$$Su|_\Gamma = 0$$

für alle $u \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$.

- $S|_{BV(\Omega)}$ wohldefiniert,
- S ist linear,
- S ist stetig (in $L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$),
- S ist injektiv (v.A. für Eindeutigkeit von Lösungen).

Warum $L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$? Die rechte Seite $\int_\Omega uv\ dx$ der schwachen Formulierung muss wohldefiniert sein. Für $N \leq 3$ gelten die Einbettungen

- $BV(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$ kompakt,
- $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ stetig.

Für $N \geq 4$ gibt es keine kompakte Einbettung von $BV(\Omega)$ mehr, sodass die rechte Seite wohldefiniert ist. Die kompakte Einbettung ist wichtig für die Existenztheorie.

Das reduzierte Problem

$$\min_{u\in BV(\Omega)} j(u) := \frac{1}{2}||Su - y_\Omega||^2_{L^2(\Omega)} + \beta|u|_{BV(\Omega)}$$

Es gibt eine eindeutige Lösung $\bar{u} \in BV(\Omega)$.

Regularisierung

Für $\gamma > 0$, $\delta > 0$ ist die H^1-Regularisierung des reduzierten Problems

$$\min_{u\in H^1(\Omega)} j_{\gamma,\delta}(u) := \frac{1}{2}||Su - y_\Omega||^2_{L^2(\Omega)} + \beta \int_\Omega \sqrt{\delta + |\nabla u|_2^2}\ dx + \frac{\gamma}{2}||u||^2_{H^1(\Omega)}.$$

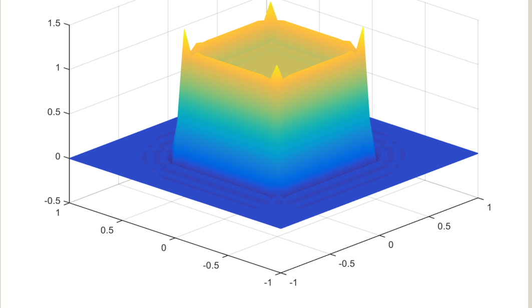
- Hier: $|u|_{BV(\Omega)} = ||\nabla u||_{M(\Omega,\mathbb{R}^N)}$,
- $\gamma > 0 \implies$ Lösung in $H^1(\Omega)$ (Pieper 2015),
- $\delta > 0 \implies$ Differenzierbarkeit von $\int_\Omega \sqrt{\delta + |\nabla u|_2^2}\ dx \approx |u|_{BV(\Omega)}$ (Acar/Vogel 1994)
- Existenz einer eindeutigen Lösung $\bar{u}_{\gamma,\delta} \in H^1(\Omega)$,
- $||\bar{u}_{\gamma,\delta} - \bar{u}||_{L^{6/5}(\Omega)} \xrightarrow{\gamma,\delta\to 0} 0$,
- $j_{\gamma,\delta}(\bar{u}_{\gamma,\delta}) \xrightarrow{\gamma,\delta\to 0} j(\bar{u})$.

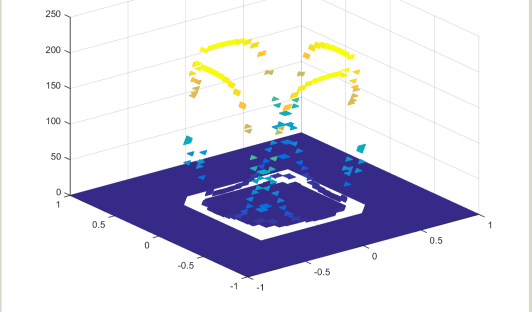
Das regularisierte Problem ist nun mit einer Finiten Elementen Approximation $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ lösbar

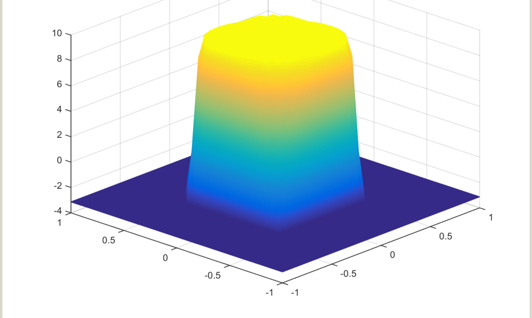
$$\min_{u_h\in V_h} \frac{1}{2}||S_h u_h - y_\Omega||^2_{L^2(\Omega)} + \beta \int_\Omega \sqrt{\delta + |\nabla u_h|_2^2}\ dx + \frac{\gamma}{2}||u_h||_{H^1(\Omega)}.$$

Hierbei ist S_h der Lösungsoperator der Galerkinapproximation der Differentialgleichung.

Beispiel







Optimalitätsbedingungen

Mit dem Minimalstellenkriterium für das Subdifferential gilt

$$0 \in \partial j(\bar{u}) \iff j(\bar{u}) = \min_{u\in BV(\Omega)} j(u).$$

Mit Rechenregeln für das Subdifferential erhalten wir

$$\partial j(\bar{u}) = \{\bar{p}\} + \beta\partial|\bar{u}|_{BV(\Omega)}.$$

Der adjungierte Zustand $\bar{p} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ist die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta p &= S\bar{u} - y_\Omega, \\ p|_\Gamma &= 0. \end{cases}$$

Zusammen ergibt sich

$$\bar{u} \text{ optimale Steuerung} \iff \begin{aligned} \left|\int_\Omega \bar{p}u\ dx\right| &\leq \beta|u|_{BV(\Omega)} \quad \forall u \in BV(\Omega), \\ -\int_\Omega \bar{p}\bar{u}\ dx &= \beta|\bar{u}|_{BV(\Omega)}. \end{aligned}$$

Problem:
- links $\bar{u}$,
- rechts $\nabla\bar{u}$ ($|\bar{u}|_{BV(\Omega)} = \sum_{i=1}^N ||\partial_{x_i} u||_{M(\Omega)}$).

Ziel: "'partiell integrieren"', um damit die Struktur von $\nabla\bar{u}$ und $\bar{u}$ analysieren zu können.

Sparsity und Optimalitätsbedingungen für $N \in \{2,3\}$ und $|u|_{BV(\Omega)} = \sum_{i=1}^N ||\partial_{x_i} u||_{M(\Omega)}$

Mit Definition des Subdifferentials

$$-\bar{p} \in \beta\partial|\bar{u}|_{BV(\Omega)} \iff \exists\bar{\lambda} \in \beta\partial|\bar{u}|_{BV(\Omega)}\colon -\int_\Omega \bar{p}u\ dx = \langle\bar{\lambda}, \nabla u\rangle_{(M(\Omega)^N)^*\times M(\Omega)^N}$$
für alle $u \in BV(\Omega)$.

Zusammen ergibt sich:

$\bar{u}$ optimal $\iff \exists\bar{\lambda} \in W^{\mathrm{div},\infty}(\Omega) \cap \left(M(\Omega)^N\right)^*$ mit

1. $||\bar{\lambda}||_\infty \leq \beta$, $||\bar{\lambda}||_{(M(\Omega)^N)^*} \leq \beta$,
2. $\operatorname{div}\bar{\lambda} = \bar{p}$,
3. für $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$:

$$\int_A \bar{\lambda}_i\ \partial_{x_i}\bar{u}_a\ dx = \beta\int_A |\partial_{x_i} u_a|\ dx,$$
$$\langle\bar{\lambda}_i,\ \partial_{x_i}\bar{u}_s \restriction_A\rangle_{M(\Omega)^*\times M(\Omega)} = \beta|\partial_{x_i}\bar{u}_s|(A).$$

Als Korollar lassen sich nun Aussagen über die Verteilung von $\nabla\bar{u}$ machen:

$\bar{\lambda}$ aus obigem Satz, dann gelten
- $A \subset \Omega$ offen, $i \in \{1,\ldots,N\}$ und $||\bar{\lambda}_i||_{M(A)^*} < \beta \implies \partial_{x_i}\bar{u}_s(A) = 0$,
- $\bar{\lambda}_i(x) = \beta\operatorname{sgn}\partial_{x_i}\bar{u}_a(x)$ f.ü. auf $\{x \in \Omega\colon |\partial_{x_i}\bar{u}_a(x)| > 0\}$.

Andere Fälle
- $N = 1, |u|_{BV(\Omega)} = ||u'||_{M(\Omega)}$,
- $N \in \{2,3\}, |u|_{BV(\Omega)} = ||\nabla u||_{M(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ (Bredies/Holler 2012),

haben ähnliche Eigenschaften.

Wir erwarten hiermit, dass $\nabla\bar{u}$ meist verschwindet und $\bar{u}$ somit stückweise konstant ist.

Referenzen

1. Acar, R. und Vogel, C. R.: Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems, Inverse Problems, 1994.
2. Bredies, K. und Holler, M.: A pointwise characterization of the subdifferential of the total variation functional, Preprint, 2012.
3. Casas, E. and Kunisch, K. und Pola, C.: Regularization by functions of bounded variation and applications to image enhancement, Appl. Math. Optim., 1999.
4. Pieper, K.: Finite element discretization and efficient numerical solution of elliptic and parabolic sparse control, Technische Universität München, 2015.
5. Ring, W.: Structural properties of solutions to total variation regularization problems, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 2000.