Ein topostheoretisches Modell der reellen Zahlen

Matthias Hutzler, Betreuer: Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Institut für Mathematik, Universität Augsburg

TopMath
Mathematik mit Promotion

Technische Universität München
Elitenetzwerk Bayern
Universität Augsburg University

Abstract

Die Vervollständigung der rationalen zu den reellen Zahlen, die üblicher Weise durch Vergrößerung der Punktemenge vorgenommen wird, wird hier an den zugehörigen Topoi vollzogen. Dabei treten anstatt der Punkte die Überdeckungen (basis-) offener Mengen in den Vordergrund und werden zu dem elementaren Unterscheidungsmerkmal der beiden Räume.

Der Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$

Der Raum $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird gewöhnlich durch dedekindsche Schnitte oder Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen als Vervollständigung des Raumes $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen konstruiert.

$$\mathbb{Q} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{R}$$

Hier soll aber von der Idee ausgegangen werden, einen topologischen Raum X durch den zugehörigen Grothendieck-Topos $\mathrm{Sh}(X)$ zu repräsentieren. (Dabei geht keine Information verloren, sofern X Hausdorff war, oder allgemeiner nüchtern.) Dann stellt sich die Frage, ob sich der Topos $\mathrm{Sh}(\mathbb{Q})$ zu einem **Topos der reellen Zahlen** „vervollständigen“ lässt, ohne auf eine der üblichen Konstruktionen für $\mathbb{R}$ zurückgreifen zu müssen.

$$\mathrm{Sh}(\mathbb{Q}) \quad \rightsquigarrow \quad ?$$

Garben auf einem topologischen Raum

Sei X ein topologischer Raum und $\mathrm{Op}(X)$ die Partialordung der offenen Teilmengen von X (die wir hier als dünne Kategorie auffassen). Eine *Prägarbe* auf X ist ein kontravarianter Funktor von $\mathrm{Op}(X)$ nach Set, das heißt eine Prägarbe P besteht aus einer Menge $P(U)$ für jedes $U \in \mathrm{Op}(X)$ und „Einschränkungsabbildungen“ $P(V) \to P(U)$ wannimmer $U \subset V$ (mit gewissen Kompatibilitäten).

Beispiel: Die Mengen $C(U)$ der stetigen Funktionen (z. B. reellwertig) auf den offenen Teilmengen $U \subset X$ bilden eine Prägarbe $P = C$.

Eine Prägarbe P auf X heißt *Garbe*, wenn sie eine gewisse „Verklebebedingung“ erfüllt:
Für jedes $V \in \mathrm{Op}(X)$, jede offene Überdeckung

$$V = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und jede kompatible Familie

$$(x_i)_{i \in I}, \quad x_i \in P(U_i)$$

(x_i und x_j stimmen auf $U_i \cap U_j$ überein) muss genau eine „Verklebung“ $x \in P(V)$ existieren (x stimmt auf jedem U_i mit x_i überein).

Beispiel: C ist eine Garbe, die Garbe der stetigen Funktionen auf X.

Die Kategorie $\mathrm{Sh}(X)$ der Garben auf X (also die Menge dieser Garben zusammen mit den jeweiligen Garbenmorphismen) ist der *Grothendieck-Topos* zu X.

Allgemeine Grothendieck-Topoi

Wollen wir statt $\mathrm{Op}(X)$ eine beliebige kleine Kategorie $\mathcal{C}$ verwenden (zum Beispiel eine beliebige Präordnung), so ist der Begriff der Prägarbe auf $\mathcal{C}$ immernoch klar, der der Garbe auf $\mathcal{C}$ aber nicht mehr. Das liegt daran, dass in der Verklebebedingung über die *Überdeckungen* eines $V \in \mathcal{C}$ quantisiert wird, und nun gar nicht mehr klar ist, was eine Überdeckung in $\mathcal{C}$ sein soll. Man kann jedoch zu $\mathcal{C}$ zusätzliche Information hinzufügen, die festlegt, was für jedes $V \in \mathcal{C}$ eine Überdeckung von V ist, sodass sich die Verklebebedingung einfach übertragen lässt!
Diese Zusätzliche Angabe der Überdeckungen wird eine *Grothendieck-Topologie* auf $\mathcal{C}$ genannt und $\mathcal{C}$ zusammen mit einer Grothendieck-Topologie heißt ein *Situs*. Ein Grothendieck-Topos ist dann einfach eine Kategorie, die äquivalent zu der Kategorie der Garben auf irgendeinem solchen Situs ist.

Der Begriff *Topos* oder *Elementartopos* ist eine weitere Verallgemeinerung des Grothendieck-Topos.

„$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ unterscheiden sich nur in den Überdeckungen“

Unser Ausgangstopos $\mathrm{Sh}(\mathbb{Q})$ ist also die Kategorie der Garben auf dem Situs $\mathrm{Op}(\mathbb{Q})$ mit der naheliegenden Grothendieck-Topologie J gegeben durch

$$(U_i)_{i \in I} \text{ überdecken } V \text{ bzgl. } J \quad \Leftrightarrow \quad V \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Und die Grothendieck-Topologie J ist es, durch deren Abänderung wir zu einem Topos gelangen wollen, der die reellen anstatt der rationelen Zahlen repräsentiert.

Zuvor können wir dank des sogenannten Vergleichslemmas die Beschreibung von $\mathrm{Sh}(\mathbb{Q})$ noch etwas greifbarer machen: Wir dürfen statt ganz $\mathrm{Op}(\mathbb{Q})$ auch nur eine Basis der Topologie von $\mathbb{Q}$ betrachten, ohne dass sich der zugehörige Topos ändert. Dabei entscheiden wir uns für die offenen Intervalle (in $\mathbb{Q}$) mit ratienalen Endpunkten, welche wir durch Paare rationaler Zahlen repräsentieren:

$$\mathbb{B} := \{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \mid a < b\}$$
$$(a,b) \leq (c,d) :\Leftrightarrow a \geq c \wedge b \leq d$$

Die von obigem J auf $\mathbb{B}$ induzierte Grothendieck-Topologie ist dann $J_{\mathbb{Q}}$ mit

$$((a_i,b_i))_{i \in I} \text{ überdecken } (c,d) \text{ bzgl. } J_{\mathbb{Q}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]c,d[\, \cap \mathbb{Q} : \exists i \in I : x \in \,]a_i,b_i[.$$

Natürlich lässt sich $\mathbb{B}$ auch als eine Basis der Topologie auf $\mathbb{R}$ auffassen. Dann induziert die kanonische Grothendieck-Topologie auf $\mathbb{R}$ eine weitere Grothendick-Topologie $J_{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{B}$, nämlich

$$((a_i,b_i))_{i \in I} \text{ überdecken } (c,d) \text{ bzgl. } J_{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]c,d[\, : \exists i \in I : x \in \,]a_i,b_i[.$$

Die Topoi der rationalen und der reellen Zahlen lassen sich also als die Garbenkategorien auf derselben Kategorie $\mathbb{B}$ ansehen, mit lediglich unterschiedlicher Grothendieck-Topologie:

Satz: Es gelten folgende Äquivalenzen von Topoi:

$$\mathrm{Sh}(\mathbb{B}, J_{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{Sh}(\mathbb{Q}), \qquad \mathrm{Sh}(\mathbb{B}, J_{\mathbb{R}}) \cong \mathrm{Sh}(\mathbb{R}).$$

Überdeckungen in $\mathbb{R}$

Obige Definition von $J_{\mathbb{R}}$ benötigt eine vorherige Definition von $\mathbb{R}$; das Ziel einer alternativen Herangehensweise an die reellen Zahlen ist also noch nicht erreicht. Gesucht ist eine „einfachere“ Beschreibung von $J_{\mathbb{R}}$, in der nur rationale Zahlen vorkommen. Man beachte, dass dies für obige Definition von $J_{\mathbb{Q}}$ durchaus gilt. Ein erster Schritt ist also:

Lemma: Ist $(c,d) \in \mathbb{B}$ und $(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)$ eine *endliche* Familie in $\mathbb{B}$, so überdecken $(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)$ genau dann (c,d) bzgl. $J_{\mathbb{Q}}$, wenn sie (c,d) bzgl. $J_{\mathbb{R}}$ überdecken.

Dies ist nämlich nur der Fall, wenn die (a_i,b_i) eine „Kette“ bilden, in der sich je zwei benachbarte Intervalle überschneiden. Für unendliche Überdeckungen unterscheiden sich $J_{\mathbb{Q}}$ und $J_{\mathbb{R}}$ aber durchaus:

Beispiel: Das Intervall $(1,2) \in \mathbb{B}$ wird bzgl. $J_{\mathbb{Q}}$ von den Intervallen

$$\{(a,b) \in \mathbb{B} \mid (a = 1 \wedge b^2 < 2) \vee (a^2 > 2 \wedge b = 2)\}$$

überdeckt, nicht jedoch bzgl. $J_{\mathbb{R}}$. (Es fehlt genau $\sqrt{2}$.)

Wie lässt sich dieser Unterschied ohne Verwendung reeller Zahlen fassen? Durch Verwendung des Satzes von Heine-Borel: Jede offene Überdeckung eines kompakten Intervalls enthält schon eine endliche Teilüberdeckung. Ein Intervall $]c,d[$ wird also genau dann von einer Familie offener Mengen überdeckt, wenn für alle $c < a < b < d$ gilt, dass $[a,b]$ (oder auch nur $]a,b[$) von einer endlichen Teilfamilie überdeckt wird. (Und es reicht auch noch, für a und b nur rationale Werte zuzulassen.) Die gewünschte nicht von $\mathbb{R}$ abhängige Beschreibung von $J_{\mathbb{R}}$ ist also gefunden:

Satz: $((a_i,b_i))_{i \in I}$ überdecken genau dann $(c,d) \in \mathbb{B}$ bzgl. $J_{\mathbb{R}}$, wenn für alle $c < a < b < d$ ein endliches $I' \subseteq I$ existiert, sodass $((a_i,b_i))_{i \in I'}$ bzgl. $J_{\mathbb{Q}}$ (oder äquivalent $J_{\mathbb{R}}$) (a,b) überdecken.

Literatur

1. Saunders Mac Lane und Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992. A first introduction to topos theory.
2. Erik Palmgren. Continuity on the real line and in formal spaces. In *From setes and types to topology and analysis*, Band 48 von *Oxford Logic Guides*, Seiten 165–175. Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.