TopMath
Mathematik mit Promotion

Stabilitätsanalyse der relativen Gleichgewichtszustände in Swarming-Modellen

Alexey Kuvshinov, Prof. Dr. Daniel Matthes

Center for Mathematical Sciences, Technische Universität München
Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Analytische Mechanik

Technische Universität München · Universität Augsburg University · Elitenetzwerk Bayern

Zusammenfassung

Selbstorganisierende Systeme treten nicht selten in Interessenbereichen sowohl von Naturwissenschaftlern als auch von Soziologen und Biologen auf. Solche Systeme, getrieben in erster Linie durch die Interaktion der beteiligten Agenten und eventuell auch durch äußere Kräfte, lassen sich bei der Beobachtung von Tieren und Fischen, bei sozialen Prozessen unter den Menschen und der Interaktion von verschiedenen Teilchen erkennen. Für den Zweck der Modellierung von diesen Systemen mittels Differentialgleichungen wurde schon eine Breite an mathematischen Modellen entwickelt. Ich habe mich auf die Stabilitätsanalyse von den Lösungen dieser Gleichungen konzentriert, bei denen alle Agenten sich auf einem Kreis befinden und die ganze Anordnung sich um den Mittelpunkt dieses Kreises dreht, den sogenannten mill-solutions.

Notation

$$\theta_j := 2\pi\frac{j}{N},\ D(\alpha) := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\ D_j := D(\theta_j),\ D_j^{\pm\phi} := D(\theta_j \pm \phi),\ J := D\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ I_n := \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ v_m^+ := \begin{pmatrix}\vdots\\ \cos m\theta_j\\ \sin m\theta_j\\ \vdots\\ \cos m(\theta_j+\phi)\\ \sin m(\theta_j+\phi)\\ \vdots\end{pmatrix},\ v_m^- := \begin{pmatrix}\vdots\\ -\sin m\theta_j\\ \cos m\theta_j\\ \vdots\\ -\sin m(\theta_j+\phi)\\ \cos m(\theta_j+\phi)\\ \vdots\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4N}$$

Modell 1-er Ordnung

Modell erster Ordnung mit zwei Gruppen aus jeweils N Agenten in der Ebene mit f_1, f_2 und $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}^2$ f'ur $j \in \{1, \dots, N\}$:

$$\dot{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{k\neq j} f_1(\|x_j - x_k\|)(x_j - x_k) + \frac{1}{N}\sum_k \tilde{f}(\|x_j - y_k\|)(x_j - y_k)$$
$$\dot{y}_j = \frac{1}{N}\sum_{k\neq j} f_2(\|y_j - y_k\|)(y_j - y_k) + \frac{1}{N}\sum_k \tilde{f}(\|y_j - x_k\|)(y_j - x_k)$$

Wir interessieren uns für die stationären Ring-Lösungen dieser Gleichung, d.h. für

$$x_j^0 = R\begin{pmatrix}\cos\theta_j\\ \sin\theta_j\end{pmatrix} = RD_j\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ und } y_j^0 = R\begin{pmatrix}\cos(\theta_j+\phi)\\ \sin(\theta_j+\phi)\end{pmatrix} = RD_j^{+\phi}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Lemma
Dies ist eine stationäre Lösung von dem obigen System erster Ordnung $\Leftrightarrow$

$$\sum_{p=1}^{N-1} f_1\left(2R\left|\sin\frac{\theta_p}{2}\right|\right)\sin^2\frac{\theta_p}{2} + \sum_{p=0}^{N-1}\tilde{f}\left(2R\left|\sin\frac{\theta_p+\phi}{2}\right|\right)\sin^2\frac{\theta_p+\phi}{2} = 0$$
$$\sum_{p=1}^{N-1} f_2\left(2R\left|\sin\frac{\theta_p}{2}\right|\right)\sin^2\frac{\theta_p}{2} + \sum_{p=0}^{N-1}\tilde{f}\left(2R\left|\sin\frac{\theta_p-\phi}{2}\right|\right)\sin^2\frac{\theta_p-\phi}{2} = 0$$

Modell 2-er Ordnung

Modell zweiter Ordnung mit $\alpha, \beta > 0$:

$$\dot{x} = v \in \mathbb{R}^{2N}$$
$$\dot{y} = u \in \mathbb{R}^{2N}$$
$$\dot{v}_j = (\alpha - \beta\|v_j\|^2)v_j + \frac{1}{N}\sum_{k\neq j} f_1(\|x_j - x_k\|)(x_j - x_k) + \frac{1}{N}\sum_k \tilde{f}(\|x_j - y_k\|)(x_j - y_k) \qquad \text{für } j \in \{1, \dots, N\}$$
$$\dot{u}_j = (\alpha - \beta\|u_j\|^2)u_j + \frac{1}{N}\sum_{k\neq j} f_2(\|y_j - y_k\|)(y_j - y_k) + \frac{1}{N}\sum_k \tilde{f}(\|y_j - x_k\|)(y_j - x_k) \qquad \text{für } j \in \{1, \dots, N\}$$

Lösungen

Wir interessieren uns für die folgenden mill-solutions der obigen Gleichung:

$$\tilde{x}_j^0 = R\begin{pmatrix}\cos\theta_j\\ \sin\theta_j\end{pmatrix},\ \tilde{v}_j^0 = \omega RJ\begin{pmatrix}\cos\theta_j\\ \sin\theta_j\end{pmatrix},\ \tilde{y}_j^0 = R\begin{pmatrix}\cos(\theta_j+\phi)\\ \sin(\theta_j+\phi)\end{pmatrix},\ \tilde{u}_j^0 = \omega RJ\begin{pmatrix}\cos(\theta_j+\phi)\\ \sin(\theta_j+\phi)\end{pmatrix}$$

Die Schlüßelmethode, mit der wir die Stabilität von der Ring-Lösung analysieren, ist das Linearisieren der ursprünglichen Differentialgleichung um dieses Equilibrium.

$$\dot{\mathcal{X}} = F(\mathcal{X}) \text{ mit } F(\mathcal{X}_0) = 0 \longrightarrow \delta\dot{\mathcal{X}} = DF(\mathcal{X}_0)\delta\mathcal{X}$$

Die Brücke zwischen dem linearizierten Modell und dem uhrsprünglichen bildet das Theorem von Hartman–Grobman, das uns in dem Fall von einem hyperbolischen Gleichgewicht sicherstellt, dass beide Systeme zumindest lokal um den betrachteten Equilibrium bzw. 0 zueinander topologisch konjugiert sind.

Linearisierung

Die Linearisierung wird in mehreren Schritten durchgeführt (alles, was in Klammern steht, gehört zum Model 2-er Ordnung)

0. (Transformation der mill-solution auf einen stationären Gleichgewicht mithilfe der neuen Koordinaten $\tilde{x}_j := D(-\omega t)x_j,\ \tilde{y}_j := D(-\omega t)y_j,\ \tilde{v}_j := D(-\omega t)v_j,\ \tilde{u}_j := D(-\omega t)u_j$.)
1. Berechnung der Jakobimatrix des Vektorfelds auf der rechten Seite der ODE.
2. Transformation der Koordinaten jedes Agenten $\delta x_j \to h_j$, $\delta y_j \to l_j$ ($\delta v_j \to p_j$, $\delta u_j \to q_j$) getrennt via
$$\delta x_j = RD_jh_j,\ \delta y_j = RD_j^{+\phi}l_j\ \left(\delta v_j = RD_jp_j,\ \delta u_j = RD_j^{+\phi}q_j\right).$$
3. Einführen einer neuen Basis des $\mathbb{R}^{4N}$ $(\mathbb{R}^{8N})$ mithilfe von v_m^+, v_m^- $\left(\text{bzw. } \begin{pmatrix}v_m^+\\ 0_{4N}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v_m^-\\ 0_{4N}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0_{4N}\\ v_m^+\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0_{4N}\\ v_m^-\end{pmatrix}\right)$ für $m \in \{1, \dots, 2N\}$. Berechnen der mit dieser Basis transformierten Linearisierungsmatrix.

Resultat für das Model 1-er Ordnung

Die Vektoren $v_m^\pm, v_{N-m}^\pm, v_{N+m}^\pm, v_{2N-m}^\pm$ spannen für alle $m \in \{1, \dots, \frac{N-1}{2}\}$ einen unter der transformierten Linearisierungsmatrix invarianten Untervektorraum. Die transformierte Matrix $M^{-1}LM$ besteht aus den folgenden 4×4–Blöcken entlang der Diagonalen.

$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{B_1+B_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(1-\cos(m+1)\theta_p)+$ $\sum_{p=0}^{N-1}\tilde{B}\left(\frac{\theta_p+\phi}{2}\right)(1-\cos(m+1)(\theta_p+\phi))$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(\cos m\theta_p-\cos\theta_p)+$ $\sum_{p=0}^{N-1}\tilde{A}\left(\frac{\theta_p+\phi}{2}\right)(\cos m(\theta_p+\phi)-\cos(\theta_p+\phi))$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{B_1-B_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(1-\cos(m+1)\theta_p)$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{A_1-A_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(\cos m\theta_p-\cos\theta_p)$
$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(\cos m\theta_p-\cos\theta_p)+$ $\sum_{p=0}^{N-1}\tilde{A}\left(\frac{\theta_p+\phi}{2}\right)(\cos m(\theta_p+\phi)-\cos(\theta_p+\phi))$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{B_1+B_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(1-\cos(m-1)\theta_p)+$ $\sum_{p=0}^{N-1}\tilde{B}\left(\frac{\theta_p+\phi}{2}\right)(1-\cos(m-1)(\theta_p+\phi))$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{A_1-A_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(\cos m\theta_p-\cos\theta_p)$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{B_1-B_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(1-\cos(m-1)\theta_p)$
$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{B_1-B_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(1-\cos(m+1)\theta_p)$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{A_1-A_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(\cos m\theta_p-\cos\theta_p)$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{B_1+B_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(1-\cos(m+1)\theta_p)+$ $\sum_{p=0}^{N-1}\tilde{B}\left(\frac{\theta_p+\phi}{2}\right)(1+\cos(m+1)(\theta_p+\phi))$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(\cos m\theta_p-\cos\theta_p)+$ $\sum_{p=0}^{N-1}\tilde{A}\left(\frac{\theta_p+\phi}{2}\right)(-\cos m(\theta_p+\phi)-\cos(\theta_p+\phi))$
$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{A_1-A_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(\cos m\theta_p-\cos\theta_p)$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{B_1-B_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(1-\cos(m-1)\theta_p)$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(\cos m\theta_p-\cos\theta_p)+$ $\sum_{p=0}^{N-1}\tilde{A}\left(\frac{\theta_p+\phi}{2}\right)(-\cos m(\theta_p+\phi)-\cos(\theta_p+\phi))$	$\sum_{p=1}^{N-1}\left(\frac{B_1+B_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_p}{2}\right)(1-\cos(m-1)\theta_p)+$ $\sum_{p=0}^{N-1}\tilde{B}\left(\frac{\theta_p+\phi}{2}\right)(1+\cos(m-1)(\theta_p+\phi))$
v_m^+	v_{2N-m}^+	v_{N+m}^+	v_{N-m}^+

Ein ähnliches Ergebnis bekommt man für das Modell 2-er Ordnung nur mit 16×16–Blöcken auf der Diagonalen. Mit diesen Resultaten lässt sich die lineare Stabilität der Ring-Lösungen und der mill-solutions in konkreten Fällen analysieren, indem man das Spektrum von den berechneten Blöcken sich ansieht. Zum Beispiel, wenn man zwei bezüglich des Systems mit einer Spezies stabile Ringe betrachet, werden diese instabil, sobald eine auf der langen Distanz abstoßend wirkende Wechselwirkung zwischen den Gruppen eingeschaltet wird.