# Mehrgitterverfahren für die Stokes Gleichung

Sandra Merchel, Prof. Dr. Barabara Wohlmuth, Dr. Lorenz John

Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Technische Universität München

## Zusammenfassung

Die Stokes Gleichungen beschreiben inkompressible Strömungen und finden Anwendung in der Geophysik oder Biophysik. Das diskretisierte System kann effizient mit einem Mehrgitterverfahren gelöst werden. Im Allgemeinen kann diese vielverwendete Methode durch eine geeignete Wahl der Komponenten problembezogen angepasst werden. Beispielsweise bietet das Mehrgitterverfahren mit einer Diskretisierung der Stokes Gleichungen mit dem MAC Schema, gewöhnlicher (bilinearer bzw. konstanter) Prolongation und dem distributiven Gauss-Seidel Glätter bzw. dem (symm.) Uzawa Glätter einen effizienten Algorithmus für die Stokes Gleichungen.

## Die Stokes Gleichungen

Die Stokes Gleichungen beschreiben Strömungen von inkompressiblen, zähen Flüssigkeiten (kleine Reynoldszahlen), welche unter anderem bei Luft- und Wasserströmungen, wie zum Beispiel bei einem Flugzeugflügel oder einer Pumpe auftreten. Sie werden wie folgt formuliert

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dabei beschreibt $\mathbf{f}$ ein äußeres Kraftfeld, $\mathbf{u}$ das Geschwindigkeitsfeld und $p$ den Druck. Da der Druck nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, wird dieser durch folgende Bedingung skaliert

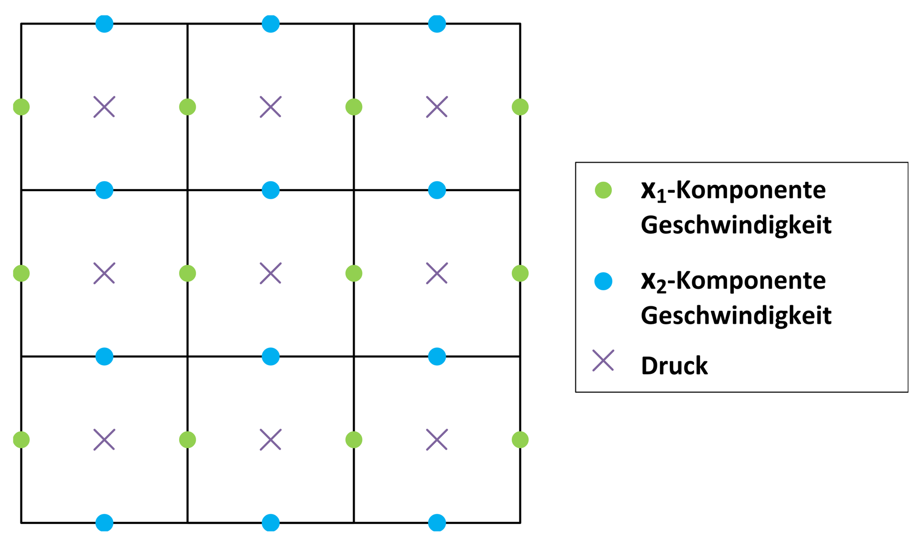
$$\int_\Omega p \, \mathrm{d}x = 0.$$

Die schwache Formulierung eines solchen Sattelpunktproblem muss die sogenannte inf-sup Bedingung erfüllen. Wählt man hierfür

$$X := H_0^1(\Omega)^2, \quad M := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int_\Omega q \, \mathrm{d}x = 0 \right\},$$

so ist die inf-sup Bedingung mit der gewöhnlichen schwachen Formulierung im Kontinuierlichen erfüllt.

## Das MAC Schema




Das MAC Schema verwendet Finite Differenzen auf einem „staggered grid". Dabei werden die Druckkomponenten im Zellmittelpunkt definiert und die Geschwindigkeitskomponenten an den Zellkanten. Für den Laplace Operator wird der 5-Punkte Stern verwendet und für die Divergenz wird eine 2-Punkte Differenz in der entsprechenden Richtung berechnet.
In der Matrix-Vektor Schreibweise nimmt das diskrete System die folgende Form

$$Sx := \begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} =: b,$$

an.
Der Vorteil dieser Diskretisierung ist die Erfüllung der diskreten inf-sup Bedingung.

**Lemma:** Die diskreten Räume für das MAC Schema erfüllen die diskr. inf-sup Bedingung.

Folglich wird eine stabile Diskretisierung erreicht, die gleichzeitig einen geringen Aufwand hat. Es wird numerisch eine Diskretisierungsordnung von 2 für $\mathbf{u}$ und $p$ beobachtet.

## Das Mehrgitterverfahren

Das Mehrgitterverfahren ist eine vielverwendete Methode, um die Gleichungssysteme, welche aus der Diskretisierung einer PDE stammen, effizient zu lösen.
Zunächst werden hochfrequente Anteile des Fehlers stark verringert, indem auf das Gleichungssystem ein Glätter ($\nu_1$-mal) angewendet wird. Der glatte Fehler kann nun gut mit Hilfe der Defektgleichung auf einem gröberen Gitter approximiert werden (Restriktion). Auf die Defektgleichung wird rekursiv das Mehrgitterverfahren ($\mu$-mal) angewendet, wobei auf einem gröbsten Gitter die Gleichung direkt gelöst wird. Die Korrekturen werden durch Interpolation von dem groben Gitter auf dem feinen Gitter approximiert (Prolongation). Zum Schluss wird das Gleichungssystem ($\nu_2$-mal) geglättet.
Hierdurch ist der Aufwand proportional zur Anzahl der Unbekannten und ist somit besonders geeignet für große Gleichungssysteme.

**Lemma:** Der Aufwand für das Mehrgitterverfahren ist $O(N)$ für $N$ Freiheitsgrade.

Man betrachte eine feste Hierarchie von Gittern. Für das Mehrgitterverfahren mit MAC Schema wird oft eine bilineare Interpolation für $\mathbf{u}$ und eine konstante Interpolation für $p$ als Prolongation gewählt. Für die Restriktion wird die transponierte Prolongation mit einer geeigneten Skalierung gewählt.Sowohl der distributive Gauss-Seidel Glätter als auch der (symm.) Uzawa Glätter stellen eine geeignete Wahl als Glättungsverfahren dar.

## Der Distributive Gauss-Seidel Glätter

Mit der distributiven Matrix

$$M = \begin{pmatrix} I & B^\top \\ 0 & -BB^\top \end{pmatrix}$$

wird das Gleichungssystem so transformiert, dass gewöhnliche Glätter angewendet werden können. Es folgt

$$SM = \begin{pmatrix} A & W \\ B & BB^\top \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & BB^\top \end{pmatrix} = \widetilde{SM}, \tag{1}$$

wobei $W = AB^\top - B^\top BB^\top$ (Kommutator). Die Approximation $W \approx 0$ ist im Speziellen für das MAC Schema im Inneren von $\Omega$ erfüllt. Das Verfahren kann nun wie folgt durchgeführt werden, wobei $\hat{A}^{-1}$ und $\hat{A}_p^{-1}$ gewöhnliche Glätter für $A$ bzw. $A_p := BB^\top$ sind:

1. Relaxation der Impulsgleichung:
$$\mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^k + \hat{A}^{-1}(\mathbf{f} - A\mathbf{u}^k - B^\top \mathbf{p}^k).$$
2. Relaxation der transformierten Kontinuitätsgleichung:
$$\delta\mathbf{p} = \hat{A}_p^{-1}(\mathbf{0} - B\mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}}).$$
3. Rücktransformation der Korrekturen:
$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}} + B^\top \delta\mathbf{p}, \\ \mathbf{p}^{k+1} &= \mathbf{p}^k - BB^\top \delta\mathbf{p}. \end{aligned}$$

## Der Uzawa Glätter

Sei $M_A$ ein Glätter für $A$ und $\omega$ ein positiver Parameter. Betrachte den Glätter

$$\begin{pmatrix} M_A & 0 \\ B & -\frac{1}{\omega} I \end{pmatrix}.$$

Somit kann das Uzawa Verfahren wie folgt formuliert werden

1. Relaxation der Geschwindigkeit:
$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + M_A^{-1}(\mathbf{f} - A\mathbf{u}^k - B^\top \mathbf{p}^k).$$
2. Relaxation des Drucks:
$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \omega(B\mathbf{u}^{k+1}).$$

Wird eine weitere Relaxation der Geschwindigkeit am Ende ausgeführt, so erhält man den symmetrischen Uzawa Glätter.
Eine optimale Wahl von $\omega$ kann mit Hilfe der lokalen Fourier Analysis bewiesen werden. Man betrachte hierfür ein unendliches Gitter und unterscheide hochfrequenten und niederfrequenten Fourier Basisfunktionen. In dieser Basis, sind $A$ und $B$ Blockdiagonalmatrizen mit je einem Block für den hochfrequenten und den niederfrequenten Anteil (z.B. $A_{\text{high}}$ bzw. $A_{\text{low}}$). Der Glättungsfaktor $\mu$ sei der Konvergenzfaktor einer Zweigittermethode, bei der auf dem groben Gitter die niedrigen Frequenzen gelöscht werden. Dann gilt

**Lemma:** (1) $\mu \leq \bar{\mu} := \max(\mu_A^{\frac{1}{2}}, \mu_S)$, mit $\mu_A = \rho(I - M_{\text{high}}^{(A)}{}^{-1} A_{\text{high}})$, $\mu_S = \rho(I - \omega(B_{\text{high}} A_{\text{high}}^{-1} B_{\text{high}}^*))$.
(2) Sei $\beta > 0$ so, dass $\lambda_{\max}(B_{\text{high}} A_{\text{high}}^{-1} B_{\text{high}}^*) \leq \beta$. Setze für ein $\tau \in \mathbb{R}$, $\omega = \frac{\tau}{\beta}$. Dann gilt $\mu_S < 1$ für $0 < \tau < 2$.
(3) Für $\kappa_\beta = \frac{\beta}{\lambda_{\min}(B_{\text{high}} A_{\text{high}}^{-1} B_{\text{high}}^*)}$ gilt $\mu_S \leq \max(\tau - 1, 1 - \frac{\tau}{\kappa_\beta})$

## Literatur

1. Ming Wang, Long Chen: Multigrid Methods for the Stokes Equations using Distributive Gauss-Seidel Relations based on the Least Squares Commutator, TR-07-18 (2013).
2. Gaspar, Notay, Oosterlee, Rodrigo: A simple and efficient segregated smoother for the discrete Stokes equations, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 36, No. 3, pp. 1187-1206 (2014).
3. Nicolaides: Analysis and Convergence of the MAC Scheme I. The Linear Problem, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 29, No. 6 , pp. 1579-1591 (1992)
4. Dongho Shin, John C. Strikwerda: Inf-Sup condition for finite-difference approximations of the Stokes equations, J. Austral. Math. Soc., Ser. B(39), pp.121-134 (1997)

LaTeX TikZposter