Interaktive zu Fraktalen konvergierende Bildsequenzen

Aaron Montag & Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert

Lehrstuhl für Geometrie und Visualisierung

TopMath Mathematik mit Promotion

Technische Universität München

Elitenetzwerk Bayern

Universität Augsburg University

Grundidee

Iteriere eine "einfache" Deformation auf einem beliebigen Bild, um schließlich in Konvergenz ein bestimmtes Fraktal zu erreichen. Für eine effektive interaktive Visualisierungsumgebung können diese Bilddeformationen auf der Grafikkarte berechnet werden.

Mathematische Grundlage für eine Klasse von Fraktalen: Iterierte Funktionen Systeme

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definiere den Raum

$$\mathcal{H}(X) := \{C \subset X | C \text{ kompakt und } C \neq \varnothing\}$$

und für $A, B \in \mathcal{H}(X)$ definiere *Hausdorff-Metrik*

$$h(A, B) := \inf\{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0} : A \subset B^\epsilon \wedge B \subset A^\epsilon\}.$$

Theorem: (X, d) vollständig $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{H}(X), h)$ vollständig.

Seien $w_1, w_2, \ldots w_n : X \to X$ Kontraktionen. Dann ist der *Hutchinson Operator*

$$W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$$
$$C \mapsto \bigcup_{i=0}^{n} w_i(C)$$

eine Kontraktion auf $(\mathcal{H}(X), h)$.

Folgerung mit Banachs Fixpunktsatz: Es gibt einen eindeutigen Fixpunkt Λ von W und für jeden Startwert $C \in \mathcal{H}(X)$ gilt

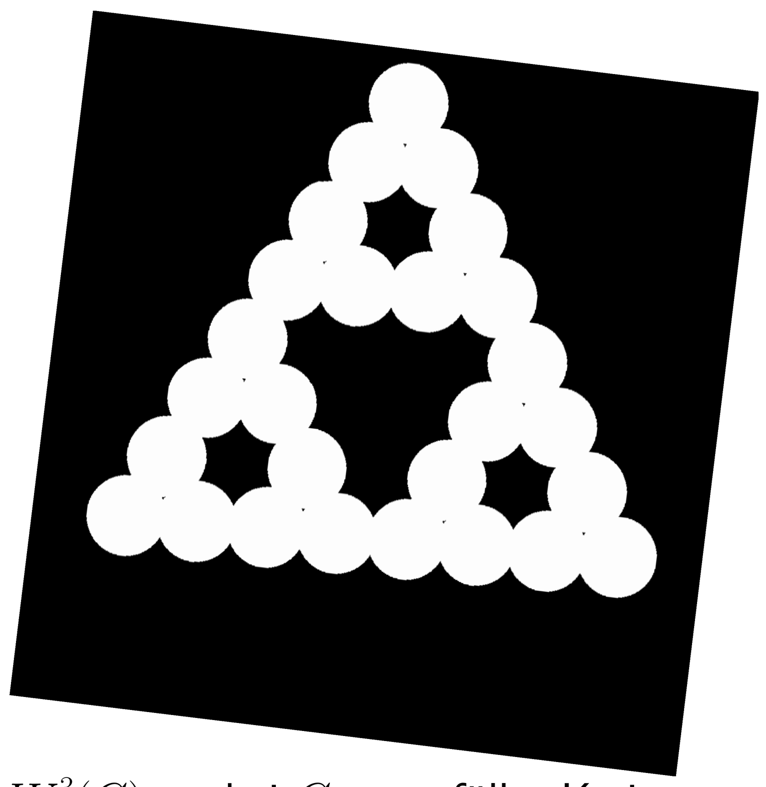
$$\lim_{n\to\infty} W^n C = \Lambda.$$

Beispiel: Sierpinski Dreieck

$$X = \mathbb{C}$$
$$w_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \forall i \in \{1, 2, 3\}$$
$$w_1 : z \mapsto \frac{1}{2}z$$
$$w_2 : z \mapsto \frac{1}{2}z + 1$$
$$w_3 : z \mapsto \frac{1}{2}z + e^{\frac{\pi i}{3}},$$

Sierpinski-Dreieck mit Ecken $(0, 1, e^{\frac{\pi i}{3}})$ ist eindeutiger Fixpunkt von W, da

$$W(\triangle) = w_1(\triangle) \cup w_2(\triangle) \cup w_3(\triangle)$$
$$= (\triangle\ ) \cup (\ \triangle) \cup (\ \triangle\ ) = \triangle.$$



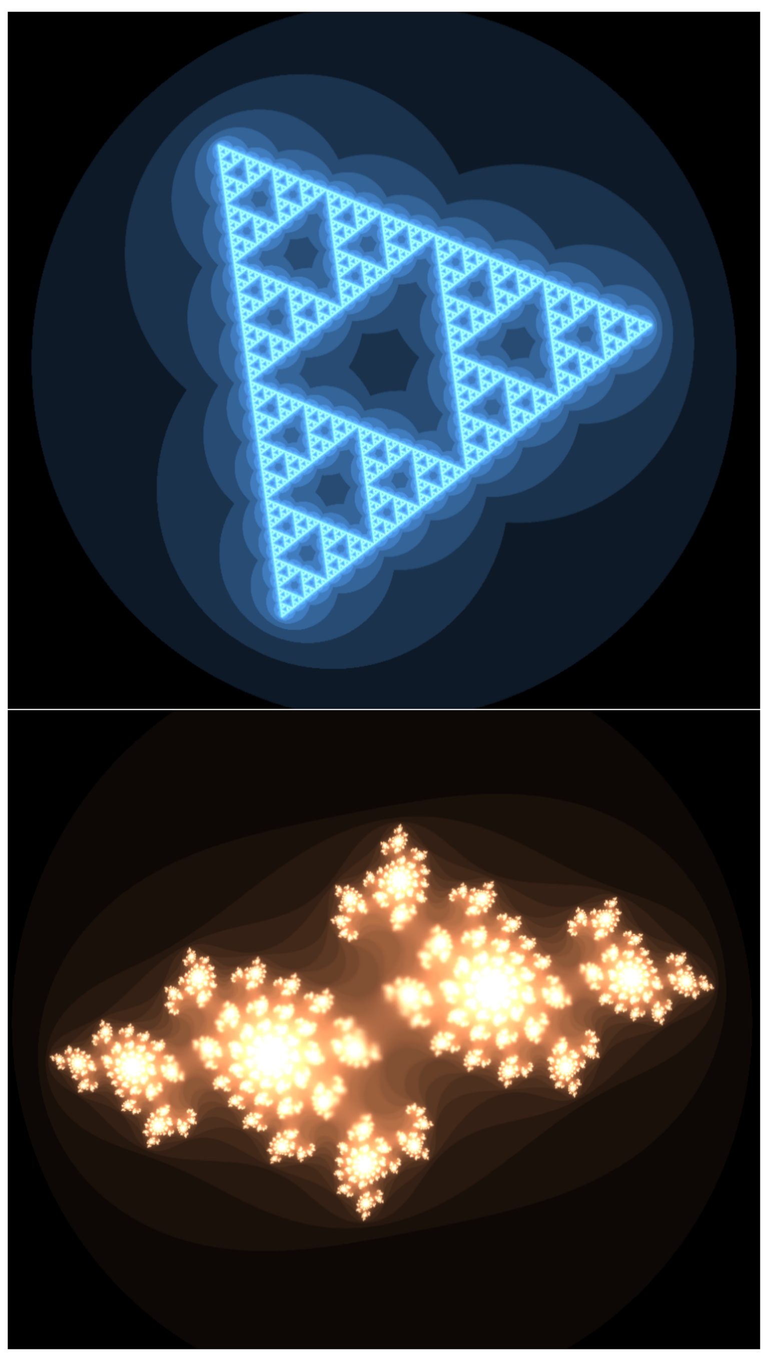
$W^3(C)$, wobei C ausgefüllte Kreisscheibe.

Herausforderungen

Rechne mit Bildern statt mit Mengen. Wandle obige Erzeugungsmethode ab.
2 verschiedene Ansätze

Fluchtzeit-Algorithmen

Pixelhelligkeit indiziert Fluchtzeit für inverses IFS.



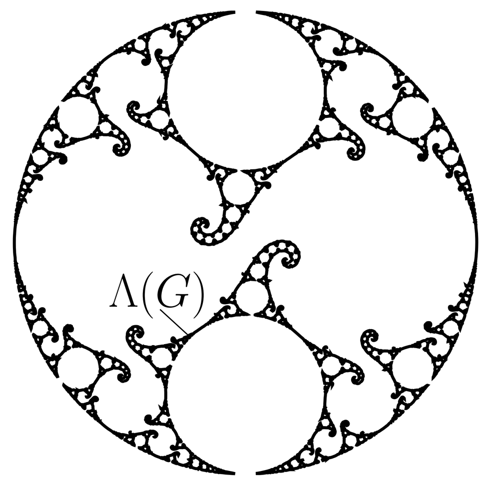
Darstellung von Maßen statt Mengen.

Berechne iterativ Wahrscheinlichkeitsmaß für zufälliges IFS.

Limesmengen von Kleinschen Gruppen

Definition: Eine *Kleinsche Gruppe* G ist eine diskrete Gruppe von Möbius-Transformationen.
G operiert auf $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Die Limesmenge von G ist definiert als

$$\Lambda(G) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{Es gibt ein } w \in \hat{\mathbb{C}} \text{ und eine Folge } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ von paarweise verschiedenen } g_n \in G \text{ mit } \lim_{n\to\infty} g_n w = z\}$$



Hauptresultat meiner Bachelorarbeit

Sei G eine endlich erzeugte Kleinsche Gruppe, $C \neq \varnothing$ eine kompakte Menge, die $\Lambda(G)$ nicht schneidet, dann gilt

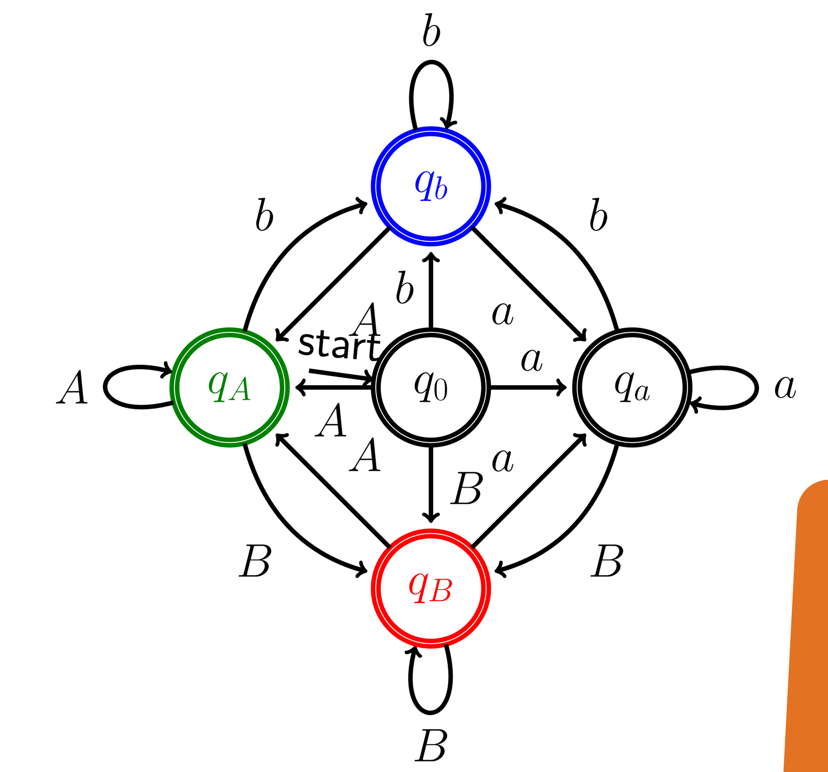
$$\lim_{n\to\infty} \bigcup_{g \in G_{\Sigma,n}} gC = \Lambda(G),$$

wobei $\Sigma \subset G$ eine unter Inversion abgeschlossene Erzeugermenge und $G_{\Sigma,n}$ die Menge der Gruppenelemente ist, deren kürzeste Darstellung als String über Σ genau n Buchstaben hat.

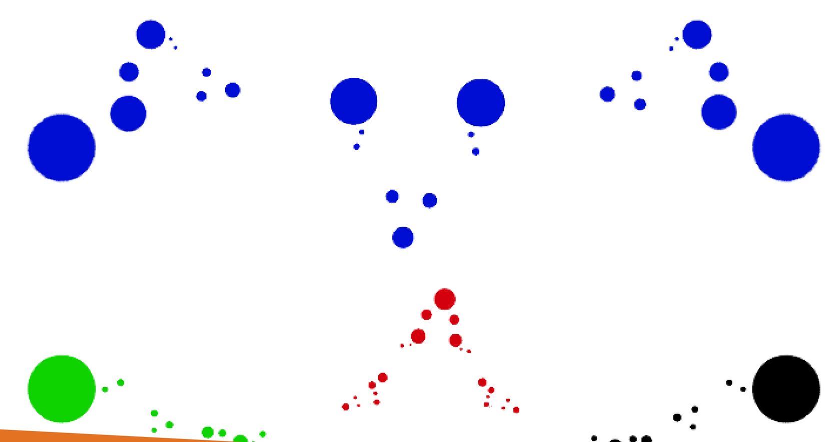
Wie berechnet man $\bigcup_{g\in G_{\Sigma,n+1}} g(C)$ aus $\bigcup_{g\in G_{\Sigma,n}} g(C)$?

Theorem: Die Sprache der Geodätischen einer Kleinschen Gruppe ist regulär.

Betrachte Automat zur geodätischen Sprache einer gegebenen Kleinschen Gruppe …



… und codiere Zustände des Automatens durch Farben im Bild. Wende Transformationen unter Berücksichtigung der Farben an.



Resultat einer maßbasierten Abwandlung:

Was könnte noch gemacht werden?

- Höherdimensionale Fraktale
- Dynamische Auflösung (Repräsentation der Texturen als Quadtree bzw. Octree)
- Interaktive Software mit "Kondensationsbild"
- Zufällige Fraktale

Referenzen

1. Aaron Montag. *Interactive Image Sequences Converging to Fractals*, Bachelor's Thesis, 2014, online verfügbar unter `http://aaron.montag.info/ba/`
2. Michael F. Barnsley. *Fractals everywhere*. Courier Dover Publications, 2012.
3. David Mumford, Caroline Series, and David Wright. *Indra's Pearls: the Vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, 2002.
4. David B. A. Epstein, M. S. Paterson, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. Levy, and W. P. Thurston. *Word Processing in Groups*. A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 1992.

LaTeX TikZposter