TopMath
Mathematik mit Promotion

Schranken für Syzygien von Invarianten

David Mundelius, Mentor: Prof. Dr. Gregor Kemper

Fakultät für Mathematik, Technische Universität München
Lehrstuhl für Algebra (M11)

Technische Universität München
Universität Augsburg University
Elitenetzwerk Bayern

Zusammenfassung

Es sei k ein Körper und G eine endliche Gruppe mit $\operatorname{char} k \nmid |G|$ sowie V eine endlichdimensionale k-Darstellung von G. Dann wird der Invariantenring $k[V]^G$ von homogenen Polynomen vom Grad höchstens $|G|$ erzeugt. Das ist die sogenannte Gradschranke von Noether. Chardin und Symonds haben kürzlich Gradschranken für die Syzygien von Invariantenringen, das heißt für die Moduln der Relationen zwischen den Erzeugern von $k[V]^G$ bewiesen. Den Beweis habe ich in meiner Bachelorarbeit dargestellt.

Definitionen

Seien k, G und V wie oben gegeben. Wähle ein minimales homogenes Erzeugendensystem $f_1, \ldots, f_r$ von $k[V]^G$. Sei dann $S := k[y_1, \ldots, y_r]$ der Polynomring in r Unbestimmten über k. Auf diesem definiert man eine Graduierung durch $\deg y_i := \deg f_i$.
Die algebraischen Relationen zwischen den f_i sind jetzt genau die Elemente des Kerns des kanonischen Homomorphismus $S \to k[V]^G, y_i \mapsto f_i$. Allgemeiner betrachtet man eine minimale graduierte freie Auflösung

$$\cdots \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \to S$$

von $k[V]^G$ als S-Modul. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl $\beta_G^i(V)$, sodass F_i von Elementen mit höchstens diesem Grad erzeugt wird.

Hilberts Syzygiensatz

Der Syzygiensatz von Hilbert besagt, dass in obigem Kontext die Moduln F_i für alle $i > r$ trivial sind. Der Beweis kann mit denselben Methoden geführt werden wie der der Schranke von Chardin und Symonds, ist aber wesentlich einfacher. Mit einem Teil der rechts genannten Schritte folgt der Syzygiensatz nämlich sofort daraus, dass der Koszulkomplex $K_\bullet(y_1, \ldots, y_r)$ in allen Graden $> i$ trivial ist.

Hilbert-Ideal und $\tau_G(V)$

Das Ideal $I := k[V]^G_+ k[V]$ in $k[V]$, das von allen homogenen Invarianten von positivem Grad erzeugt wird, heißt das **Hilbert-Ideal**. Man kann zeigen, das jedes homogene Element aus $k[V]$, dessen Grad mindestens $|G|$ ist, im Hilbert-Ideal liegt.
Der kleinste Grad, sodass jedes homogene Element aus $k[V]$ von diesem Grad im Hilbert-Ideal liegt, wird mit $\tau_G(V)$ bezeichnet. Außerdem bezeichnet man mit $\beta(k[V]^G)$ den kleinsten Grad, sodass $k[V]^G$ als k-Algebra von Elementen von höchstens diesem Grad erzeugt wird.Es ist also

$$\beta(k[V]^G) \leq \tau_G(V) \leq |G|.$$

Das Resultat

Das Resultat von Marc Chardin und Peter Symonds besagt, dass mit den oben eingeführten Notationen gilt:

$$\beta_G^i(V) \leq (i+1)\tau_G(V) + i - 1 \leq (i+1)|G| + i - 1.$$

Aus Resultaten von Barbara Schmid und Mufit Sezer ist bekannt, dass der maximal mögliche Wert $\beta(k[V]^G) = |G|$ nur für zyklische Gruppen angenommen wird. Damit stellt sich die Frage, inwieweit die Schranke von Chardin und Symonds scharf ist. In meiner Bachelorarbeit habe ich dazu zeigen können, dass jede abelsche Gruppe (außer der trivialen Gruppe) eine k-Darstellung besitzt, sodass $\beta_G^1(V) = 2\tau_G(V)$. Andererseits ist, falls V die reguläre Darstellung von G ist, $\beta(k[V]^G) = \tau_G(V)$. Letzteres ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil der Wert von $\beta(k[V]^G)$ maximal ist, wenn V die reguläre Darstellung ist.

Beweisskizze zum Resultat von Chardin und Symonds:

1. Schritt: Tor-Funktor

Seien M und N Moduln über einem Ring R. Sei weiter eine freie Auflösung

$$\cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0$$

von M gegeben. Dann bezeichnet $\operatorname{Tor}_i^R(M, N)$ die i-te Homologie des Kettenkomplexes

$$\cdots \to F_n \otimes_S N \to F_{n-1} \otimes_S N \to \cdots \to F_1 \otimes_S N \to F_0 \otimes N.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der freien Auflösung und falls M und N graduierte Moduln sind, kann man auch $\operatorname{Tor}_i^R(M, N)$ als graduierten Modul konstruieren. Man kann jetzt für einen graduierten Modul $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}}$ definieren:

- $\operatorname{end} M := \sup\{i \in \mathbb{N} : M_i \neq 0\}$
- $t_i^R(M) := \operatorname{end} \operatorname{Tor}_i^R(M, k)$

Man kann zeigen, dass im Kontext des Satzes von Chardin und Symonds gilt: $\beta_G^i(V) = t_i^S(k[V]^G) \leq t_i^S(k[V])$.
Im zweiten Schritt geht dabei wesentlich ein, dass $\operatorname{char} k \nmid |G|$.
Außerdem ist für zwei Moduln M und N stets $\operatorname{Tor}_i^R(M, N) \cong \operatorname{Tor}_i^R(N, M)$. Damit genügt es also, $\operatorname{end} \operatorname{Tor}_i^S(k, k[V])$ zu bestimmen.

2. Schritt: Koszul-Komplexe

Nach dem oben gesagten ist der S-Modul $\operatorname{Tor}_i^S(k, k[V])$ zu untersuchen. Dazu wird eine freie Auflösung von k als Modul über dem Polynomring S benötigt. Eine einfache Möglichkeit dafür ist der Koszul-Komplex $K_\bullet(y_1, \ldots, y_r)$ (für die Definition siehe etwa das unten genannte Buch von Bruns und Herzog). Damit ist $\operatorname{Tor}_i^S(k, k[V])$ die i-te Homologie des Komplexes $K_\bullet(y_1, \ldots, y_r) \otimes k[V]$, welcher sich via dem Homomorphismus $S \to k[V], y_i \mapsto f_i$ auch als Komplex von $k[V]$-Moduln auffassen lässt. Aus der Theorie der Koszul-Komplexe ist dann bekannt, dass dieser isomorph ist zu dem Koszul-Komplex $K_\bullet(f_1, \ldots, f_r)$.

3. Schritt: Castelnuovo-Mumford-Regularität

Für einen endlich erzeugten graduierten Modul M über einem standard-graduierten Polynomring $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ (zum Beispiel $R = k[V]$) definiert man die Castelnuovo-Mumford-Regularität $\operatorname{reg} M$ von M als $\sup\{t_i^R(M) - i : i \in \mathbb{N}\}$. Falls $\operatorname{end} M < \infty$, kann man zeigen, dass $\operatorname{end} M = \operatorname{reg} M$ und diese Voraussetzung ist für die Homologien von $K_\bullet(f_1, \ldots, f_r)$ erfüllt. Damit folgt die Schranke von Chardin und Symonds aus dem folgenden Resultat von Bruns, Conca und Römer:
Seien $f_1, \ldots, f_r \in R$, sodass es $c \in \mathbb{N}$ gibt, mit der Eigenschaft, dass jedes homogene Element vom Grad mindestens c in R im Ideal $(f_1, \ldots, f_r)$ liegt. Dann gilt für die i-te Homologie des Koszul-Komplexes $K_\bullet(f_1, \ldots, f_r)$:

$$\operatorname{reg} H_i(K_\bullet(f_1, \ldots, f_r)) \leq i(c+1) + c - 1.$$

Literatur

1. W. Bruns, A. Conca, T. Römer, Koszul cycles, in Combinatorial Aspects of Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Floystad et al., eds. Abel Symposia 6 (2011), 17-33
2. W. Bruns, J. Herzog, Cohen-Macaulay rings. Cambridge Univerity press, Cambridge, 1998
3. M. Chardin, P. Symonds, Degree bounds on homology and a conjecture of Derksen, 2014, preprint, arxiv.org/abs/1410.0150
4. H. Derksen, G. Kemper, Computational invariant theory, Springer, Berlin-Heidelberg, 2002
5. D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry, Springer, New York, 1995
6. B. Schmid, Finite groups and invariant theory, in Topics in invariant theory, Malliavin ed., Lecture notes in mathematics 1478 (1991), 35-66
7. M. Sezer, Sharpening the generalized noether bound in the invariant theory of finite groups, Journal of algebra 254 (2002), 252-263
8. C. Weibel, An introduction to homological algebra. Cambridgs University press, Cambridge, 2003