Quotientensingularitäten

Alexander Trost, Betreuer: Prof. Dr. Christian Liedtke
Zentrum für Mathematik, Technische Universität München
Lehrstuhl für Algebra

TopMath
Mathematik mit Promotion

Elitenetzwerk Bayern

Zusammenfassung

Wenn eine endliche Gruppe $G \subset GL_{\mathbb{C}}(n)$ auf $\mathbb{C}^n$ operiert, kann eine Äquivalenzrelation durch Identifizierung von Punkten in den gleichen Orbits bzgl. der Gruppenoperation definiert werden.Iim Rahmen dieser Bachelorarbeit wurde gezeigt, dass dieser Quotientenraum $\mathbb{C}^n/G$ von $\mathbb{C}^n$ modulo dieser Äquivalenzrelation zusammen mit einer geeignet gewählten Garbe holomorpher Funktionen einen komplexen Raum darstellt und diese komplexen Räume für konjugierte Untergruppen von $GL_{\mathbb{C}}(n)$ isomorph sind. Anschließend wurde ein Klassifikationsresultat für endliche Untergruppen von $SO(3)$ bewiesen und eine Methode entwickelt, dieses Resultat auf endliche Untergruppen von $SL_{\mathbb{C}}(2)$ anzuwenden. Zuletzt wurde für endliche zyklische Gruppen $G \subset GL_{\mathbb{C}}(2)$ gezeigt, wie die Singularität in $\mathbb{C}^2/G$ durch sukzessive Aufblasungen des Ursprungs aufgelöst werden kann.

Quotienten der Form $\mathbb{C}^n/G$

Definition 1. *Eine endliche Gruppe $G \subset GL_{\mathbb{C}}(n)$ operiert auf dem Polynomring $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ dadurch, dass für ein $A = (a_{ij}) \in G$ die Abbildung $x_i \mapsto \sum_{k=1}^n a_{ki}x_k$ zu einem $\mathbb{C}$-Algebraendomorphismus fortgesetzt wird. Für ein $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ wird das Bild von f bzgl. dieses Algebrahomorphismus als f^A bezeichnet.*

Es sei $\pi_G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/G$ die kanonische Projektionsabbildung von $\mathbb{C}^n$ auf den Quotienten. Weiterhin sei $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n/G}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} | f \circ \pi_G : \pi_G^{-1}(U) \to \mathbb{C} \; holomorphic\}$ die Garbe holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}^n/G$.
Durch Anwendung des Hilbertschen Basissatzes kann dann erhalten werden, dass $S^G = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] | f^A = f \; \forall A \in G\}$ eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra ist. Wählt man Erzeuger $f_1, \dots, f_r$ so kann man folglich einen $\mathbb{C}$-Algebraepimorphismus

$$\phi : \mathbb{C}[y_1, \dots, y_r] \to S^G, y_i \mapsto f_i$$

definieren. Dann gilt folgender Satz:

Theorem 2. *Es sei $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^r, P \mapsto (f_1(P), \dots, f_r(P))$ und $V(G) := \{Q \in \mathbb{C}^r | g(Q) = 0 \; \forall g \in ker(\phi)\}$.
Dann gibt die Abbildung $\bar{F} : \mathbb{C}^n/G \to V(G), [P] \mapsto F(P)$ einen Isomorpismus von dem beringten Raum $(\mathbb{C}^n/G, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n/G})$ in den analytischen Raum $V(G)$. Ergo ist $\mathbb{C}^n/G$ ein komplexer Raum. Ferner haben in $GL_{\mathbb{C}}(n)$ konjugierte Gruppen isomorphe Quotienten.*

Klassifizierung endlicher Untergruppen von $SL_{\mathbb{C}}(2)$

Zunächst klassifiziert man die endlichen Untergruppen von $SO(3)$ und dann wendet man dieses Resultat auf $SL_{\mathbb{C}}(2)$ an.
Hierfür nehmen wir an, dass Ikosaeder, Oktaeder und Tetraeder gegeben sind mit der Eigenschaft, dass ihre Zentren der Koordniatenursprung von $\mathbb{R}^3$ sind und ihre Ecken auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$ liegen. Dann werden die Untergruppen von $SO(3)$, die diese Objekte in sich selbst abbilden als Tetraeder-,Oktaeder- oder Ikosaedergruppen bezeichnet.

Weiterhin bezeichnet man eine Untergruppe von $SO(3)$, die ein planares, reguläres n-Eck deren Zentrum der Koordinatenursprung von $\mathbb{R}^3$ ist, in sich selbst abbildet als Diedergruppe der Ordnung $2n$. Dies ermöglicht es den folgenden Satz zu formulieren:

Theorem 3. *Jede endliche Untergruppe G von $SO(3)$ ist bis auf Konjugation entweder eine Tetraedergruppe, Ikosaedergruppe, Oktaedergruppe, eine Diedergruppe oder eine endliche zyklische Untergruppe von $SO(3)$.*

Durch einige technische Rechnungen auf dem Fastkörpers der Quaternionen $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}^{2\times2}$ wird dann folgendes Lemma gezeigt:

Lemma 4. *Es gibt eine Abbildung*

$$\rho : SU(2) \to SO(3)$$

mit ρ surjektiv und $ker(\rho) = \{\pm I_2\}$.

Diese Abbildung wird dann benutzt um spezielle Untergruppen von $SU(2)$ zu definieren.

Definition 5. *Es sei Γ eine endliche Untergruppe von $SO(3)$. Dann wird die Gruppe $\rho^{-1}(\Gamma) \subset SU(2)$ als binäre Gruppe korrespondierend zu Γ bezeichnet.*

Dies ermöglicht dann die Formulierung des folgenden Satzes:

Theorem 6. *Jede endliche Untergruppe von $SL_{\mathbb{C}}(2)$ ist konjugiert zu entweder einer endlichen zyklischen Untergruppe von $SL_{\mathbb{C}}(2)$ oder einer binären Gruppe korrespondierend zu einer Diedergruppe, einer Tetraedergruppe, Oktaedergruppe oder einer Ikosaedergruppe.*

Zum Beweis dieses Satzes wird unteranderem gezeigt, das jede endliche Untergruppe von $SL_{\mathbb{C}}(2)$ konjugiert ist zu einer endlichen Untergruppe von $SU(2)$ und dann eine Fallunterscheidung zwischen binären und nicht binären Gruppen gemacht. Die nicht-binären Gruppen stellen sich dann als zyklische Gruppen ungerader Ordnung heraus und die binären Gruppen korrespondierend zu einer zyklischen Gruppe wiederum als zyklische Untergruppen von $SL_{\mathbb{C}}(2)$. Die restlichen binären Gruppen sind unproblematisch. Gemäß Theorem 2 und 6 ist es also hinreichend die Quotienten korrespondierend zu den Gruppen aus Theorem 6 zu betrachten wenn man Quotienten von endlichen Untergruppen von $SL_{\mathbb{C}}(2)$ untersucht.

Eine Klassifizierung endlicher, zyklischer Untergruppen von $GL_{\mathbb{C}}(2)$

Es kann gezeigt werden, dass jede endliche Untergruppe von $GL_{\mathbb{C}}(2)$ bis auf Konjugation von

$$A = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

mit ξ einer primitive n.ten Einheitswurzel und ν einer primitive s.ten Einheitswurzel erzeugt wird. Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 7. *Es sei $G = \langle A \rangle$, $p \in \mathbb{N}$ gegeben mit $lcm(s, n) = pn$,*

$$B := \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \nu^p \end{pmatrix}$$

und $H := \langle B \rangle$. Dann gilt $\mathbb{C}^2/G \simeq \mathbb{C}^2/H$.

Dieses Lemma liefert einem einfach Gegenbeispiele zu beiden Richtungen der naheliegenden Vermutung $G \simeq H \iff \mathbb{C}^n/G \simeq \mathbb{C}^n/H$. Darüber hinaus zeigt es dass Quotienten endlicher, zyklischer Untergruppen von $SL_{\mathbb{C}}(2)$ immer regulär sind. Darüber hinaus ermöglicht es den Beweis des folgenden Theorems:

Theorem 8. *Es sei $G \subset GL_{\mathbb{C}}(2)$ zyklisch. Dann ist $\mathbb{C}^2/G \simeq \mathbb{C}^2/H$ mit*

$$H = \langle \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^p \end{pmatrix} \rangle$$

mit ξ eine primitive n.te Einheitswurzel und $1 \le p < n$ und $ggT(p, n) = 1$.

Quotienten dieser Form bezeichne ich als $\mathbb{C}^2_{n,p}$ und das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft als Grad der Singularität. Ist der Grad einer Singularität 1 so ist der entsprechende Quotient isomorph zu $\mathbb{C}^2$.

Auflösung zyklischer Quotientensingularitäten

Ähnlich wie bei der gewöhnlichen Division mit Rest kann man zu $n, q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 0$ Zahlen $v, r \in \mathbb{N}_0$ finden mit $n = vq - r$ und $0 \le r < q$. Dies wird als Division mit negativem Rest von n durch q bezeichnet und man kann sie benutzen um einen modifizierten euklidischen Algorithmus zu entwickeln.
Dies ermöglicht es einem den folgenden Satz zu formulieren:

Theorem 9. *Es gibt einen komplexen Raum Σ und eine Modifikation $\sigma : \Sigma \to \mathbb{C}^2_{n,q}$ am Punkt $(0,0)G$, sodass es offene Teilmengen Σ_1 und Σ_2 von Σ gibt mit $\Sigma_1 \simeq \mathbb{C}^2$ und $\Sigma_2 \simeq \mathbb{C}^2_{q,r}$ mit r aus der Division mit negativem Rest von n durch q und $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$.*

Der Raum Σ wird erhalten als Quotient der Aufblasung der affinen Ebene über $\mathbb{C}$ modulo einer geeignet gewählten Gruppenoperation. Der Grad der Singularität in Σ ist also kleiner geworden im Vergleich zu $\mathbb{C}^2_{n,q}$. Durch Iteration dieses Prozess lässt sich also die Singularität sukzessive auflösen und man sieht, dass man so viele Schritte benötigt wie der modifizierte euklidische Algorithmus braucht um den $ggT(n, q) = 1$ zu bestimmen. Jedoch liefert einem dieser Prozess nur lokale Auflösungen von Singularitäten für bestimmte offene Mengen. Diese lokalen Auflösungen der Singularität lassen sich jedoch geeignet ineinander kleben um eine globale zu erhalten. Die Struktur der globalen Auflösung ist dann wie folgt gegeben.

Theorem 10. *Es sei die folgende Kette von Gleichungen aus der Division mit negativem Rest gegeben: Die erste Gleichung sei $n = qb_1 - q_1$ mit $0 \le q_1 < q$. Solange $q_k \neq 1$ und b_k gegeben ist, definieren wir q_{k+1} and b_{k+1} mitels Division mit negativem Rest wie folgt: $q_{k-1} = b_{k+1}q_k - q_{k+1}$ mit $0 \le q_{k+1} < q_k$. Es sei $s \in \mathbb{N}$ so dass $q_s = 1$. Dann gibt es offene Teilmengen $\mathbb{C}^2_{(i)}$ von Y mit $Y = \mathbb{C}^2_{(1)} \cup \ldots \cup \mathbb{C}^2_{(s+2)}$ und $\mathbb{C}^2_{(i)} \simeq \mathbb{C}^2$ für jedes $i \in \{1, \dots, s+2\}$. Außerdem ist die exzeptionelle Menge E der Auflösung $\sigma : Y \to \mathbb{C}^2_{n,q}$ eine Vereinigung von Mengen $E_i \simeq \mathbb{P}^1$.*

Referenzen

1. K. Lamotke: Regular Solids and isolated Singularities, Vieweg Advanced Lectures in Mathematics (1986)
2. R. C. Gunning, H. Rossi: Analytic Functions in several complex variables,Prentice-Hall (1965)
3. R. Hartshorne: Algebraic Geometry, Springer (1977)
4. Atiyah, McDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addisson Wesley (1969)
5. Christian Karpfinger, Kurt Meyberg: Algebra, Gruppen-Ringe-Körper, Springer Spektrum (2009)