Petrov-Galerkin-Finite-Elemente-Methoden zur Zeitdiskretisierung parabolischer partieller Differentialgleichungen

Christoph Weber, Prof. Dr. Boris Vexler, Dipl.-Math. Andreas Springer
Zentrum Mathematik, Technische Universität München
Lehrstuhl für Optimalsteuerung

Elitenetzwerk Bayern

Zusammenfassung

Es wurden Zeitdiskretisierungen parabolischer partieller Differentialgleichungen mithilfe von stetigen Galerkin-Verfahren der Ordnung r (cG(r)-Verfahren) untersucht. Hierbei werden die resultierenden nichtlinearen Gleichungssysteme mit dem Newton-Verfahren gelöst. Da das entstehende System gekoppelt ist und bei einer direkten Entkopplungsstrategie unweigerlich komplexe Koeffizienten auftreten, war es das Ziel, Entkopplungsstrategien zu entwickeln, bei denen genau das vermieden wird. Die Idee dabei ist eine geeignete Approximation an das exakte Newton-Update zu entkoppeln um so die komplexen Koeffizienten zu vermeiden. Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Varianten vorgestellt. Der erste Ansatz basiert auf Blockelimination und der Zweite auf einer Approximation der Koeffizientenmatrix durch eine Matrix mit einpunktigem Spektrum.

Problemformulierung und Diskretisierung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein polygonales Ortsgebiet mit $d \in \{2,3\}$ und V ein Hilbertraum, der stetig und dicht in den Hilbertraum $H := L^2(\Omega)$ eingebettet ist. Für gegebenes $T > 0$ und zugehöriges Zeitintervall $I = (0,T)$ betrachte die schwache Formulierung einer parabolischen Gleichung der Form
Gesucht ist $u \in X := \left\{v \in L^2(I,V) \;\middle|\; \partial_t v \in L^2(I,V^*)\right\}$ mit

$$\int_I \langle \partial_t u, \Phi\rangle \,\mathrm{dt} + \int_I a(u)(\Phi)\,\mathrm{dt} + (u(0),\Phi(0)) = (f,\Phi)_I + (u_0,\Phi(0)) \quad \forall\, \Phi \in L^2(I,V),$$
$$u_0 \in H, f \in L^2(I,V^*).$$

Für die cG(r)-Zeitdiskretisierung wählt man nun eine Partition des Intervalls I in halboffene Teilintervalle $I_m = (t_{m-1}, t_m]$. Auf diesen werden global stetige Polynome vom Grad r für den Ansatz- und global unstetige Polynome vom Grad $r-1$ für den Testraum definiert. Benutzt man zusätzlich für die Ortsdiskretisierung konforme Finite-Elemente der Ordnung s, so lautet das vollständig diskretisierte Problem wie folgt
Gesucht ist $u_{kh} \in X_{k,h}^{r,s}$ mit

$$\sum_{m=1}^{M} (\partial_t u_{kh}, \Phi)_{I_m} + \int_I a(u_{kh})(\Phi)\,\mathrm{dt} = (f,\Phi)_I \quad \forall\, \Phi \in \tilde{X}_{k,h}^{r-1,s}.$$

Hierbei bezeichnen h und k die Diskretisierungsparameter im Ort bzw. der Zeit.

Entkopplungsstrategien am Beispiel $r = 2$

Variante 1: "Blockelimination"
Als Basen für den Test- bzw. Ansatzraum werden Lagrange-Polynome mit den jeweiligen Gauss-Legendre-Knoten und zusätzlichem linken Endpunkt des Intervalls I_m gewählt. Bezeichnet man mit R_i^l das Newton-Residuum und $L := k_m M^{-1}\bar{A}$, wobei $\bar{A}$ eine Mittelung der Steifigkeitsmatrix von A_u ist, so löst das Newton-Update w_{kh}^l die folgenden 2N Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\mathrm{Id} + \frac{1}{2}L & \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+3)}\mathrm{Id} \\ \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-3)}\mathrm{Id} & \frac{3}{2}\mathrm{Id} + \frac{1}{2}L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^l \\ W_2^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1}R_1^l \\ M^{-1}R_2^l \end{pmatrix}.$$

Blockelimination liefert

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\mathrm{Id} + \frac{1}{2}L & \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+3)}\mathrm{Id} \\ 0 & \mathrm{Id} + \frac{1}{2}L + \frac{1}{12}L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^l \\ W_2^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1}R_1^l \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)M^{-1}R_1^l + \left(\frac{1}{2}\mathrm{Id} + \frac{1}{6}L\right)M^{-1}R_2^l \end{pmatrix}.$$

Nach Approximation des Polynom $1+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2$ durch $(1+\sqrt{\frac{1}{12}})^2$, kann das approximierte System durch mehrere implizite Euler-Schritte gelöst werden

$$\begin{aligned}
\Big(M + \frac{1}{\sqrt{12}}k_m\bar{A}\Big)\tilde{V}_2^l &= \Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\Big)R_1^l + \frac{1}{2}R_2^l + \frac{1}{6}k_m\bar{A}M^{-1}R_2^l \\
\Big(M + \frac{1}{\sqrt{12}}k_m\bar{A}\Big)\tilde{W}_2^l &= M\tilde{V}_2^l \\
\Big(M + \frac{1}{\sqrt{12}}k_m\bar{A}\Big)\tilde{W}_1^l &= \frac{3+\sqrt{3}}{3(\sqrt{3}+1)}R_1^l + \frac{5\sqrt{3}-15}{3(\sqrt{3}+1)}R_l^2 \\
&\quad -\Big(\frac{4\sqrt{3}-6}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+3)}M + \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+3)}k_m\bar{A}\Big)\tilde{W}_2^l
\end{aligned}$$

Variante 2: "Single-Newton-Iteration"
Umformulierung des Newton-Updates für die skalare Testgleichung $\frac{d}{dt}u + \tau u = f$ liefert

$$(\mathrm{Id} + \tau k_m \mathcal{A})W = \mathbf{A}^{-1}R.$$

Da $\mathcal{A}$ **nicht** über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, wird $\mathcal{A}$ durch eine Matrix T mit nur einem r-fachen Eigenwert approximiert.
Zusammen mit einer Schur-Zerlegung von T ergibt sich das folgende implementierbare Schema für cG(2)

$$\begin{aligned}
(M + \gamma k_m\bar{A})\tilde{X}_1 &= F_{11}R_1 + F_{12}R_2 \\
(M + \gamma k_m\bar{A})\tilde{X}_2 &= F_{21}R_1 + F_{22}R_2 + U_{21}M\tilde{X}_1 \\
\tilde{W}_i &= Q_{i1}\tilde{X}_1 + Q_{i2}\tilde{X}_2, \quad i = 1,2,
\end{aligned}$$

wobei F, Q und U nur von T und der gewählten Basis abhängen und somit automatisiert berechnet werden können.

Testproblem

Sei $\Omega = (0,1)^2$, $T = 1/2$. Betrachte die semilineare Gleichung

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) + u^3(t,x) &= f(t,x) && \text{in } (0,T)\times\Omega, \\
u(t,x) &= 0 && \text{auf } [0,T]\times\partial\Omega, \\
u(0,x) &= 0 && \forall\, x \in \Omega
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
f(t,x) = \;& \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\Big\{\pi^2\cos(\pi^2 t) + 10 \\
&+ \big(\sin(\pi^2 t) + 10t\big)\Big[2\pi^2 + \big(\sin(\pi^2 t) + 10t\big)^2 \sin(\pi x_1)^2 \sin(\pi x_2)^2\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

und exakter Lösung

$$u(t,x) = \big(\sin(\pi^2 t) + 10t\big)\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2).$$

Numerische Resultate

Um den zeitlichen Fehler für verschiedene Ordnungen r und Schrittweiten k zu messen, wird ein festes örtliches Gitter aus 524288 gleichgroßen Dreiecken (lineare Finite Elemente) benutzt. Zur Diskretisierung wird das Intervall $[0,\frac{1}{2}]$ in $M = \frac{1}{k}$ äquidistante Teile unterteilt
Für die Fehlermessung wird im Ort stets die L^2-Norm verwendet. Alle auftretenden Integrale werden mit der r-punktigen Gauss-Legendre Quadratur numerisch berechnet. Gemessen wird der L^2-Fehler $||u - u_{kh}||_2$ in der Zeit. Bis zur Dominanz des örtlichen Diskretisierungsfehlers zeigen die Ergebnisse das erwartete Verhalten.

M	$\|\|u-u_{kh}\|\|_2$	EOC
5	0.0017	
8	4.4992e-04	2.8849
10	2.3260e-04	2.9566
16	5.7677e-05	2.9669
20	3.0166e-05	2.9046
25	1.6542e-05	2.6925
theor. Ordn.		3

L^2-Konvergenzmessung für die Testgleichung

Ein Vergleich der Kontraktionsraten $\nu_e := \max_{l=2,3,\ldots} \frac{||\tilde{W}^{l+1}||}{||\tilde{W}^l||}$ der beiden cG(2)-Varianten zeigt deutliche Vorteile für die erste Entkopplungsstrategie. Außerdem fallen die Kontrationsraten mit kleinerer Schrittweite. Die für den linearen Fall scharfe Schranke ν_r ist, aufgrund der Mittelung der Steifigkeitsmatrix und anderer im nichtlinearen Fall auftretender Effekte, nicht scharf.

$M\backslash r$	2_1	2_2	3
5	0.3538	0.9288	0.5433
8	0.3154	0.7696	0.4802
10	0.3075	0.6762	0.3441
16	0.2376	0.4780	0.1858
20	0.2330	0.3921	0.1347
25	0.2074	0.3257	0.1277
ν_r	0.089	0.067	0.138

Kontraktionsratenvergleich für die Testgleichung

Quellen

1. A. K. Aziz and P. Monk. Continuous Finite Elements in Space and Time for the Heat Equation. Mathematics of Computation, 1989.
2. C. Kruse and S. Shaw. Time-decoupled high order continuous space-time finite element schemes for the heat equation. SIAM Journal of Scientific Computing, 2014.
3. G. Matthies and F. Schieweck. Higher order variational time discretizations for nonlinear systems of ordinary differential equations. Preprint, 2014.
4. S. Perez-Rodriguez, S. Gonzalez-Pinto and B. P. Sommeijer. An iterated Radau Method of Time-Dependent PDEs. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009.
5. T. Richter, A. Springer and B. Vexler. Efficient numerical realization of discontinuous galerkin methods for temporal discretization of parabolic problems. Numerische Mathematik, 2013.
6. F. Schieweck. A-stable discontinuous Galerkin-Petrov time discretization of higher order. Journal of Numerical Mathematics, 2010.
7. A. Springer: An Efficient Realization of High Order Discontinuous Galerkin Time Stepping Schemes. In Vorbereitung, 2014
8. V. Thomée. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Springer-Verlag New York, 2006.
9. T. Werder, K. Gerdes, D. Schötzau, and C. Schwab, hp-discontinuous Galerkin time stepping for parabolic problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001.