Erläuterungen zur irregulären Hodge-Filtration auf der getwisteten de-Rham-Kohomologie

Patrik André Hammer

Abstract

Es ist ein zentrales Resultat in der Hodge-Theorie, dass die de-Rham-Kohomologiegruppen einer beliebigen projektiven Varietät Hodge-Filtrationen besitzen. In [1] verallgemeinert J.-D. Yu dieses Konzept: Gegeben sei im Folgenden eine komplexe glatte quasi-projektive Varietät U und eine reguläre Funktion f auf U. Man betrachtet zunächst den um f getwisteten de-Rham-Komplex von U und definiert auf dessen Kohomologie eine neuartige Filtration: Die irreguläre Hodge-Filtration. Für diese Definition wählt man zunächst eine gute Kompaktifizierung von U und f. Aufgrund des bekannten Resultats von Hironoka existiert eine solche Kompaktifizierung immer, allerdings ist nicht klar, dass man für alle möglichen Wahlen dieser stets dieselbe irreguläre Hodge-Filtration erhält. Dies wird im ersten Teil von [1] gezeigt.

Die getwistete de-Rham-Kohomologie

Betrachte den flachen Zusammenhang

$$\nabla : \mathcal{O}_U \to \Omega^1_U$$

gegeben durch

$$v \mapsto dv + v \cdot df.$$

Der getwistete de-Rham-Komplex ist der Kettenkomplex, den man mit der kanonischen Fortsetzung von ∇ erhält:

$$(\Omega^\bullet, \nabla) = \left[\mathcal{O} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1 \xrightarrow{\nabla} \Omega^2 \to \cdots\right].$$

Die getwistete de-Rham-Kohomologie von U und f ist definiert als die Hyperkohomologie

$$H^i_{\mathrm{dR}}(U, \nabla) := \mathbb{H}^i\left(U, (\Omega^\bullet, \nabla)\right)$$

des getwisteten de-Rham-Komplexes.

Gute Kompaktifizierungen

Sei X eine komplex-projektive Varietät, in die sich U offen einbetten lässt. Das Paar $(X, X\backslash U)$ sei gute Kompaktifizierung von (U, f), das heißt:

1. X ist glatt,
2. $X\backslash U$ ist ein Normalschnittsdivisor von X und
3. f lässt sich zu einem Morphismus von Varitäten $f_X : X \to \mathbb{P}$ fortsetzen.

Für eine gute Kompaktifizierung (X, S) $(S = X\backslash U)$ von (U, f) mit der offenen Einbettung $U \hookrightarrow X$ definiert man den getwisteten de-Rham-Komplex mit Polstellen entlang S:

$$(\Omega^\bullet_X(*S), \nabla) = j_*(\Omega^\bullet, \nabla),$$

wobei $j : U \to X$ die Inklusion sei. Der Rückzug $j_*\nabla$ wird wieder mit ∇ bezeichnet.
Die getwistete de-Rham-Kohomologie kann mithilfe des getwisteten de-Rham-Komplex mit Polstellen berechnet werden:
Man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$H^i_{\mathrm{dR}}(U, \nabla) \cong \mathbb{H}^i\left(X, (\Omega^\bullet_X(*S), \nabla)\right).$$

Die irreguläre Hodge-Filtration

Es sei P der Poldivisor von f_X. Betrachte für $\lambda \in \mathbb{R}$ den Unterkomplex

$$F^0(\lambda) := \left[\mathcal{O}(\lfloor -\lambda P \rfloor) \xrightarrow{\nabla} \breve{\Omega}^1(\lfloor (1-\lambda)P \rfloor) \to \breve{\Omega}^2(\lfloor (2-\lambda)P \rfloor) \to \cdots\right]$$

von $(\Omega^\bullet_X(*S), \nabla)$. Wenn $P = \sum a_V V$, dann ist hierbei $\lfloor cP \rfloor := \sum \lfloor c a_V \rfloor V$ für reelles c. Die irreguläre Hodge-Filtration des getwisteten de-Rham-Komplexes mit Polstellen ist definiert als

$$F^\lambda_X(\nabla) := F^0(\lambda)^{\geq \lceil \lambda \rceil}$$

Der Exponent $\geq \lceil \lambda \rceil$ bedeutet, dass die Einträge der Grade kleiner als $\lceil \lambda \rceil$ auf 0 gesetzt werden:

$$F^0(\lambda)^{\geq \lceil \lambda \rceil} := \left[0 \to \cdots \to 0 \to \breve{\Omega}^{\lceil \lambda \rceil}(\lfloor (\lceil \lambda \rceil - \lambda)P \rfloor) \to \breve{\Omega}^{\lceil \lambda \rceil + 1}(\lfloor (\lceil \lambda \rceil + 1 - \lambda)P \rfloor) \to \cdots\right].$$

Zusammen mit dem kanonischen Isomorphismus $H^i_{\mathrm{dR}}(U, \nabla) \cong \mathbb{H}^i\left(X, (\Omega^\bullet_X(*S), \nabla)\right)$. erhält man eine Filtration von der getwisteten de-Rham-Kohomologie von U und f. Das ist die irreguläre Hodge-Filtration. Man findet für jedes Paar (U, f) eine gute Kompaktifizierung, diese ist im Allgemeinen allerdings nicht eindeutig bestimmt. Es ist a priori nicht klar, ob Konstruktion der irregulären Filtration von der Wahl der guten Kompaktifizierung abhängt.

Beweisidee

Dies wird in [1] bewiesen: Sind zwei gute Kompaktifizierungen $(X, S), (Y, T)$ von (U, f) gegeben, konstruiert man eine birationale Abbildung $g : X \to Y$, die ein Isomorphismus über U ist. Diese kann man nach dem schwachen Faktorisierungstheorem für birationale Morphismen in bestimmte Blowups und Blowdowns faktorisieren. Daher reicht es zu zeigen, dass zwei gute Kompaktifizierungen $(X, S), (Y, T)$ dann nach obiger Konstruktion dieselbe irreguläre Hodge-Filtration auf $H^i_{\mathrm{dR}}(U, \nabla)$ liefern, wenn X aus Y durch einen bestimmten Blowup hervorgeht. Das wird manuell nachgerechnet.

Literatur

[1]: Jeng-Daw Yu, Irregular Hodge Filtration on Twisted De Rham Cohomology, 2013 [2]: Jaroslaw Wlodarczyk, Simple Constructive Weak Factorization, 2006