

E-Tests Moodlekurs:

www.moodle.tum.de/course/view.php?id=113185

Passwort „TUMVorkurs25“

Morgen Dienstag Vorlesung im Galileo-Hörsaal

Kap 1 Grundlagen der Logik

Mathematische Objekte

Terme: π , $x+5$, $\exp$

Formeln: können wahr oder falsch sein:

Aussagen: $e < \pi$ (wahr)

$(-5)^2 < (-3)^2$ (falsch)

$a \leq a^2$ (abhängig von $a \in \mathbb{R}$)

Aussagenlogik

Aussagen wie "6 ist gerade" können kombiniert werden:

- $A \wedge B$ ("A und B")

Bsp: $A: c > 5$ $B: c < 10$, so bedeutet $A \wedge B: c > 5 \wedge c < 10$

- $A \vee B$ ("A oder B")

(inklusive Oder, "mit Milch oder Zucker?")

Merkregel: Die Oder fließt im Flussbett: $\forall$

Bsp. $A: a \leq 2$, $B: a \leq -2$. Dann bedeutet $A \vee B$

also $a \leq 2$ oder $a \leq -2$, bzw. $a \leq \pm 2$

- $\neg A$ ("nicht A")

- $A \Rightarrow B$ ("aus A folgt B")

Beispiel: $\underbrace{"b \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar}" }_A \Rightarrow \underbrace{"b \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}" }_B$

- $A \Leftrightarrow B$ ("A ist äquivalent zu B")

Bsp: "b ist durch 6 teilbar" $\Leftrightarrow$ "b ist durch 2 und 3 teilbar"

Präzisierung durch Wahrheitstafel: wahr (w), falsch (f)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
f	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	f
w	f	f	w	f	f	f
w	w	w	w	f	w	w

Bem:

- Für die Implikation $A \Rightarrow B$ schreibt man auch $B \Leftarrow A$
umgangssprachlich: "wenn A, dann B", "A impliziert B",
"A ist hinreichend für B", "B ist notwendig für A", "nur wenn B, dann A"
- $A \Rightarrow B$ weder kausal noch temporal
A: "Ich habe im Lotto gewonnen", B: "Ich habe ein Los gekauft."
Es gilt $A \Rightarrow B$.
- Ist A falsch, dann ist $A \Rightarrow B$ immer wahr:
"Wenn der Mond aus Käse ist, dann fress ich einen Bissen"
"Wenn der Mond aus Käse ist, dann ist 7 eine Primzahl"
- Achtung: $A \Rightarrow B$ ist nicht äquivalent zu $B \Rightarrow A$
Bsp: $x=3 \Rightarrow x^2=9$
 $x=3 \nLeftarrow x^2=9$

- Dagegen ist die Kontraposition äquivalent:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	w
w	w	w	f	f	w	w

Eine Formel die in allen Fällen wahr ist, nennt man eine Tautologie.

- Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist oder B wahr ist: $\neg A \vee B$:

$$\text{Beh: } (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Bew: Wahrheitstafel.

- Klammerersparnisregeln: Hier: • $\neg$ bindet stärker als alle anderen

Bsp: $(\neg A) \vee B$ bedeutet $\neg A \vee B$ und nicht $\neg(A \vee B)$

- $\wedge, \vee$ binden stärker als $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

- Kommutativgesetze:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

- Assoziativgesetze

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) (\Rightarrow A \wedge B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

- Distributivgesetze

$$(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

- de Morgansche Gesetze

$$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Variablen und Quantoren

Konstanten: $0, 1, 2, e, \mathbb{N}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} (\approx 1.61803)$

Variablen: $i, j, k, m, n, \dots$ (für nat. Zahlen), $x, y, \dots$ (für Zahlen),
 $f, g, \dots$ (für Funktionen) A, B (für Mengen)

Substitution von Variablen:

$$x^2 - 3x + 2 \Big|_{x=2} = [x^2 - 3x + 2]_{x=2} = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$$

$y^2 + y + 0 = y(y+1)$

$$x^2 - 3x + 2 \Big|_{x=2+y} = (2+y)^2 - 3(2+y) + 2 = \cancel{y^2 + y + 0} = \cancel{y(y+1)}$$

$$x^2 - 3x + 2 \Big|_{x=x^2} = (x^2)^2 - 3x^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2$$

Variablen können durch Quantoren gebunden werden

- $\forall$ bedeutet "für alle"
- $\exists$ bedeutet "es existiert (mindestens) ein"

Bsp: "Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n , die größer ist." (Archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen)

wird zu

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

Bemerkungen:

- Es kommt auf die Reihenfolge an:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} : n > x$$

ist falsch: "Es gibt eine natürliche Zahl die größer als jede reelle ist."

- $\forall$ ist verallgemeinertes logisches Und, bei endlich vielen Möglichkeiten. Z.B.

$$\forall x \in \{1, 2, 3\} : A(x) \Leftrightarrow A(1) \wedge A(2) \wedge A(3)$$

- $\exists$ entspricht "Oder": Bsp:

$$\exists x \in \{1, 2, 3, 4\} : A(x) \Leftrightarrow A(1) \vee A(2) \vee A(3) \vee A(4)$$

- Die Verneinung von Formeln mit Quantoren entsprechen den de Morganschen Regeln:

$$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$$

$$\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$$