

Notfall: 089-289-112

PW: "TUMVorkurs25"

Kap. 2 Mengen

Menge: Zusammenfassung math. Objekte zu einem neuen math. Objekt

Ist a ein Element der Menge A ,
so schreibt man $a \in A$.

$a \notin A$ bedeutet $\neg a \in A$ ($= \neg(a \in A)$)

Beispiele: $A = \{1, \sqrt{2}, \pi, -10^9\}$ hat 4 Elemente

- Die Reihenfolge und Häufigkeit ist unwichtig:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 2, 1, 3, 1, 1\}$$

"mit der Eigenschaft, dass"

- Unendliche Mengen

$$\{2, 4, 6, 8, \dots\} := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: (n \text{ ist gerade} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 2k)$$

- Spezifikation durch Zuweisung:

$$\{1, 4, 9, 16, \dots\} := \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

Bem: Der Unterschied zwischen "1" und "1" ist subtil.
Vorerst benutzen wir meistens nur "1".

Weitere Beispiele:

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\} = \{-1, 0, 1, 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = \{\pm\sqrt{2}\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$
- $\{\} = \emptyset$ ist die leere Menge
- $\{1, 2, \{1, 2\}, \mathbb{N}\}$ hat 4 Elemente

Mengenbeziehungen

A, B beliebige Mengen: Dann steht

$$\underbrace{A \subseteq B}_{\text{A ist Teilmenge von B}} \quad \text{für} \quad \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

Gleichheit von Mengen

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Weitere Schreibweisen:

$$A \not\subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg (A \subseteq B)$$

$$A \subsetneq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subseteq B \wedge A \neq B \quad \text{"A ist echte Teilmenge von B"}$$

Bem: "C" bedeutet fast immer " $\subseteq$ ".

Manche Autoren verwenden "C" für " $\subsetneq$ " (in Analogie zu "<" und " $\leq$ ")

- Wie beweist man $A \subseteq B$:

$$2.3. \quad \forall x \in A: x \in B \quad (\text{Abh für } \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Beweisschema

- Sei $x \in A$ (beliebig aber fest)
- Dann folgt daraus, ...
- somit ist x auch in B , also $x \in B$
- Insgesamt folgt $A \subseteq B$ □
- Für Mengengleichheit: zeige $A = B$

Beweisschema:

- zeige $A \subseteq B$:---
- zeige $A \supseteq B$:--- (also $B \subseteq A$)
- Somit ist $A = B$ □

Mengenoperationen

Seien A, B beliebige Mengen

- Vereinigungsmenge: $A \cup B$:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



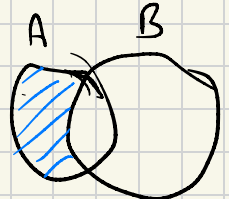
- Schnittmenge: $A \cap B$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$



- Differenzmenge: $A \setminus B$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$



- Ist M eine Referenzmenge und $A \subseteq M$ dann heißt

$$C_M A := M \setminus A$$
das Mengenkomplement von A (in M)
 Man schreibt auch A^C für $C_M A$.

- $A \times B$ ist das kartesische Produkt von A und B

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

(Für zwei Objekte a und b ist (a, b) ein neues Objekt, wobei
 $(a, b) \neq (b, a)$ falls $a \neq b$)

- $P(A)$ ist die Potenzmenge von A ,

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

(das bedeutet: $B \in P(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$),
 die Menge aller Teilmengen von A .

Def: Zwei Mengen A, B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Beispiele: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$

$$\bullet A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{3\}, \quad A \setminus B = \{1, 2\}$$

$$\bullet A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$\bullet B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

Bemerkung: $|A|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von A (falls A endlich ist). Dann gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Anmerkung:

$$A = \{3, 2, 1\}$$

$$2^{|A|} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{$$

$$\emptyset,$$

$$\{1\},$$

$$\{2\},$$

$$\{1, 2\},$$

$$\{3\},$$

$$\{3, 1\},$$

$$\{3, 2\},$$

$$\{1, 2, 3\},$$

$$\}$$

• Alles sind Mengen:

Bsp: • geordnetes Paar: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$
 "Kuratowski-Paar"

$$\text{Achtung: } (a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\} \quad (\neq \{a\})$$

• Zahlen: $\emptyset =: 0_{\mathbb{N}}$

$$1_{\mathbb{N}} = \{0_{\mathbb{N}}\} = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$$

$$2_{\mathbb{N}} = \{0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}\}$$

$$3_M := \{0_M, 1_M, 2_M\}$$

$$\vdots$$

$$(n+1)_M := \{0_M, 1_M, \dots, (n-1)_M, n_M\} = (n)_M \cup \{n_M\}$$

Gibt es die Menge $\{0_M, 1_M, 2_M, 3_M, \dots\}$?

Ja, das ist ein Axiom der Mengenlehre ZFC (Unendlichkeitsaxiom),