Zu Kap 1 und 2

$\underbrace{\neg \underbrace{a}_{\text{Term}} \in \underbrace{A}_{\text{Term}}}_{\text{Formel}}$ bedeutet $\neg(a \in A)$

nicht $(\neg a) \in A$

Kap 3 Zahlenmengen

- Die Menge der Natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

- Die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{34}{51}$ bezeichnen dasselbe mathematische Objekt

Jede rationale Zahl hat genau eine Darstellung als

- vollständig gekürzter Bruch.
- Dezimalbruch der schließlich periodisch ist (wenn Periode 9 verboten ist, endliche Dezimalbrüche haben Periode 0)

- Die Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{R}$$

enthält auch $\sqrt{2}, e, \pi, \ldots$.

Veranschaulichung als reelle Zahlengerade

- Die komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad i \cdot i = -1$$

Es gilt

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Spezielle Teilmengen der reellen Zahlen:

Intervalle

Sei $a, b \in \mathbb{R}$

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{a \leq x \leq b}_{(a \leq x) \land (x \leq b)}\}$$

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} =: [a,b[$$

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$
$$(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$
$$(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$
$$(-\infty,+\infty) := \mathbb{R}$$

sind Intervalle.

Rechnen mit Zahlen

- Archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen:

$$\forall x,y>0:\ \exists n \in \mathbb{N}:\ nx > y$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}:\ n > x$$

Das garantiert, dass es keine unendlich großen oder infinitesimalen (reellen) Zahlen gibt.

- Die Bruchrechenregeln: Für $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $b,d \neq 0$
  - $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$
  - $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$
  - $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
  - $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
  - $c \neq 0 \Rightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

- Potenzen: Für $a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} \qquad a^0 := 1$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \text{ falls } a \neq 0$$

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}, \text{ falls } a \geq 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(= (a^m)^{\frac{1}{n}}\right) \quad \text{für } a > 0.$$

Damit kann man zeigen, dass für $a > 0$, $x, y \in \mathbb{Q}$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

Frage was ist $a^{\sqrt{2}}$? $a^{1.}, a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, a^{1.4142}, \ldots$

- Fakultät: Für $n \in \mathbb{N}$: $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! := 1$

Binomialkoeffizienten: Für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Summationszeichen und Produktzeichen

Seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ beliebige Zahlen, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$$

Bsp.: • $1+2+3+\dots+100 = \sum_{i=1}^{100} i$

• $\sum_{k=-2}^{5} 1 = \underbrace{1+\dots+1}_{8\text{mal}} = 8$

Bem: Σ und Π werden rekursiv definiert: Sei $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=1}^{0} a_i := 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$$

$$\prod_{i=1}^{0} a_i := 1, \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i := \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1}$$

Prinzip der vollständigen Induktion

(1) 1 ist eine natürliche Zahl, $1 \in \mathbb{N}$

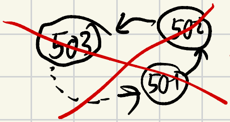
(2) Jedes $n \in \mathbb{N}$ hat genau einen Nachfolger $n+1 \in \mathbb{N}$

(3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

(4) Jede natürliche Zahl hat höchstens einen Vorgänger

(5) Fängt man bei 1 zu zählen an und zählt immer weiter, so durchläuft man genau die natürlichen Zahlen

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \dots$



wegen (5)

Die 5 Peano-Axiome.

Bsp. Sei $A(n) \Leftrightarrow$ "$n(n+1)$ ist gerade"

$A(1) \Leftrightarrow \underbrace{1\cdot(1+1)}_{=2}$ ist gerade (wahr)

$A(2) \Leftrightarrow 2\cdot(2+1)$ ist gerade (wahr)

$\vdots$

Beweis durch Fallunterscheidung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig

1. Fall n ist gerade. Also ist $n(n+1)$ gerade

2. Fall n ist ungerade. Also ist $(n+1)$ gerade. Also auch $n(n+1)$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: n(n+1)$ ist gerade

- Sei $B(n) \Leftrightarrow$ "n^3+5n ist durch 6 teilbar"

$B(1) \Leftrightarrow \underbrace{1^3+5\cdot 1}_{6}$ ist durch 6 teilbar (wahr)

$B(2) \Leftrightarrow 18$ " (wahr)

$B(3) \Leftrightarrow 42$ " (wahr)

$\vdots$

Zeige: aus $B(n)$ folgt $B(n+1)$

Beweis $(n+1)^3+5(n+1) = n^3+3n^2+8n+6 = \underbrace{(n^3+5n)}_{\text{teilbar durch } 6}+3\underbrace{(n^2+n)}_{\substack{=n(n+1)\\ \text{gerade}}}+6$

ist also auch durch 6 teilbar.

Gezeigt ist

$B(1),\ B(1)\Rightarrow B(2),\ B(2)\Rightarrow B(3),\ B(3)\Rightarrow B(4), \ldots$

Daraus folgt mit vollständiger Induktion

$B(1), B(2), B(3), B(4), \ldots$

Gezeigt ist $\forall n \in \mathbb{N}: B(n)$

Standardbeispiel: $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Beh: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$

Bew: $A(1): \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ ✓ (Induktionsanfang)

Sei $n \in \mathbb{N}$: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (Induktionsvoraussetzung) (Induktionsschritt)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} =$$

$$\underbrace{\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}}_{A(n+1)}$$

$1+2+3+4+\cdots+n$

$\parallel$

Induktionsschluss: Also gilt $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$