

Kap. 4 Abbildungen (Funktionen)

Definition und Eigenschaften

Definition: Seien A und B beliebige Mengen und sei $x \mapsto f(x)$ eine Funktionsvorschrift, die jedem Element von A ein Element von B zuordnet, dann ist f eine Abbildung (Funktion) von A nach B .

Bemerkung: f ist ein mathematisches Objekt und hat drei Bestandteile: Definitionsbereich, Wertebereich und Funktionsvorschrift.

- Schreibweisen für " f ist Funktion von A nach B mit Funktionsvorschrift $x \mapsto f(x)$ ":

$$f: A \rightarrow B, a \mapsto f(a), \quad f: A \ni a \mapsto f(a) \in B$$

Beispiele

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ (Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$)

f ist die Funkt., $f(5)$ ist 25, $f(x)$ steht für x^2

$f(i)$ ist nicht definiert da $i \notin \mathbb{R}$

- Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

Dann steht $f(3)$ für $\frac{1}{3}$, $f(\sqrt{2})$ für $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $f(0)$ ist nicht definiert (der Term $\frac{1}{0}$ ist auch nicht definiert)

- Sei X die Menge der sitzenden Personen im Hörsaal, dann ist $f: X \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

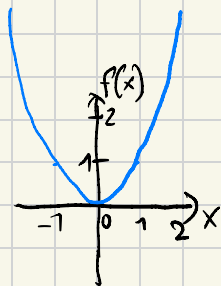
$$x \mapsto (\text{Reihennummer von } x, \text{Platznummer von } x)$$
eine wohldefinierte Funktion
- Sei A eine Menge. Dann ist $\text{id}_A: A \rightarrow A, a \mapsto a$ die zu A gehörige Identitätsabbildung.
- Die Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

ist durch Fallunterscheidung definiert. Statt $|\cdot|(x)$ schreibt man $|x|$

Definition: Ist f eine Funktion von A nach B , so nennt man $G_f := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$ den Graphen von f .

Bsp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Dann ist $G_f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



- Nicht jedes Element des Wertebereichs wird getroffen. Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -4$
- Es kann mehrere Werte geben mit $f(x) = 4$, nämlich $x = \pm 2$

Definition Seien A, B Mengen und f eine Funktion von A nach B
(kurz: Sei $f: A \rightarrow B$)

- Die Funktion f heißt injektiv, wenn für zwei unterschiedliche Elemente $a, a' \in A$ ($a \neq a'$) auch $f(a) \neq f(a')$. In Formeln

$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow \forall a, a' \in A: a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

$$(\Leftrightarrow \forall a, a' \in A: f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$$

$$[\text{wegen } (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)]$$

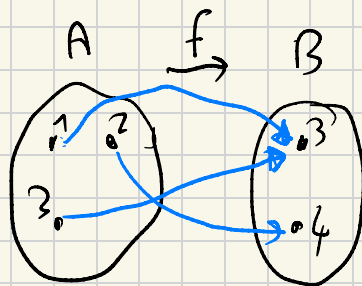
- Die Funktion f heißt surjektiv, wenn es zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ sodass $f(a) = b$, in Formeln

$$f \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow (\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b)$$

- Die Funktion f heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

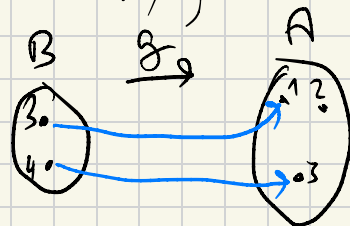
Beispiele:

- Für $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ sei $f: A \rightarrow B$
mit $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 3$, $G_f \subseteq A \times B$



f ist surjektiv aber nicht injektiv ($f(1) = f(3)$)

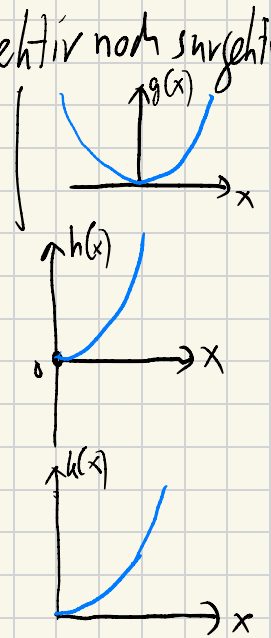
- Sei $g: B \rightarrow A$, $g(3) := 1$, $g(4) := 3$



g ist nicht surjektiv, aber injektiv.

$$G_g \subseteq B \times A$$

- Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv
- Die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty), x \mapsto x^2$ ist surjektiv aber nicht injektiv
- $h: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
- $k: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, k(x) = x^2$, ist injektiv und surjektiv also bijektiv



Komposition von Funktionen und Umkehrfunktion

Definition: Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ Funktionen, Dann heißt die Funktion $g \circ f$, ("g verknüpft mit f") definiert durch

$$g \circ f: A \rightarrow C, x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

die Verknüpfung (oder Komposition) von f mit g

Beispiel: Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f(x) = x^2$ und $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(y) = \frac{1}{1+y}$.

Dann ist

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$f \circ g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Satz und Definition: Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ ist

genau dann bijektiv wenn es ein $g: B \rightarrow A$ gibt, so dass $g \circ f = \text{id}_A$ und $f \circ g = \text{id}_B$

In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt und heißt Umkehrabbildung (oder Umkehrfunktion) von f .
Man schreibt $f^{-1} := g$

Beispiele:

- $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f(x) = x^2$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

• Betrachte

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f(x) = x^2 \quad (\text{surjektiv, nicht injektiv})$$

$$g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(y) = \sqrt{y} \quad (\text{nicht surjektiv, aber injektiv})$$

Dann gilt

$$f \circ g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f \circ g(y) = (\sqrt{y})^2 = y (= \text{id}_{\mathbb{R}_0^+}(y))$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \quad (\neq \text{id}_{\mathbb{R}}(x))$$



- $\mathbb{R}^- := (-\infty, 0)$. Betrachte $f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^-, f(x) = -x^2 + 2x$

$$\text{NR: Löse } y = -x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - y}$$

Unter der Bedingung $x, y < 0$ bleibt nur $x = 1 - \sqrt{1 - y}$

[Überprüfe $g(f(x)) = x$ für $x \in \mathbb{R}^-$ und $f(g(y)) = y$ für $y \in \mathbb{R}^-$]

Damit ist f bijektiv und $f^{-1}: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^-, f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1 - y}$