

Kap 5. Gleichungen und Ungleichungen

Beispiele mit einer Variablen

- Gesucht ist eine reelle Zahl x , derart dass $3x-5=7$.

$$3x-5=7 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=4$$

Also ist 4 die einzige Lösung der Gleichung $3x-5=7$ mit der Variablen x .

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 3x-5=7\} = \{4\}$$

- Finden die Lösungen der Gleichung $x^2-3=6$

$$\text{NR: } x^2-3=6 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

$$\text{Die Lösungsmenge ist } \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3=6\} = \{\pm 3\}$$

- Bestimme die Lösungen der Gleichung $|x^3-10x|=6x$

Lsg: Erinnerung: $a \geq 0 \Rightarrow |a|=a$, $a < 0 \Rightarrow |a|=-a$

1. Fall $x^3-10x \geq 0$. Dann $|x^3-10x| = x^3-10x$. Wir suchen Lösungen

$$\text{von } x^3-10x=6x \Leftrightarrow x^3-16x=0 \Leftrightarrow x(x^2-16)=0$$

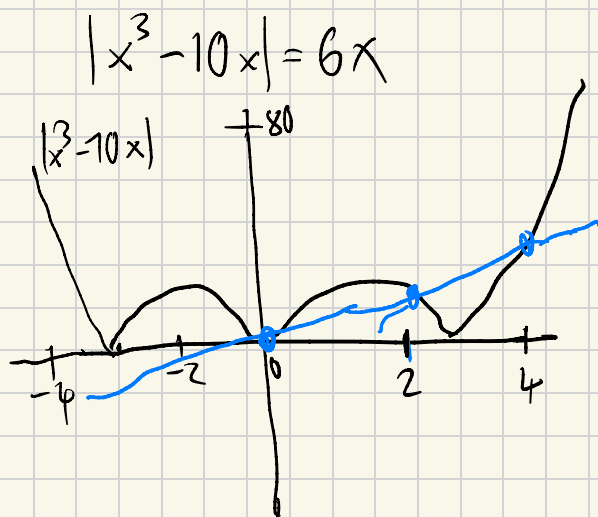
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2=16 \Leftrightarrow x=0, 4, -4$$

2. Fall $x^3-10x < 0$. Dann ist $|x^3-10x| = -(x^3-10x) = -x^3+10x$

$$|x^3-10x|=6x \stackrel{2. \text{ Fall}}{\Leftrightarrow} -x^3+10x=6x \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0, 2, -2$$

Insgesamt sind 2, 0, 4 die Lösungen



- Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2-3x}{4x+5} \geq 2$

1. Fall: $4x+5 > 0$ ($x > -\frac{5}{4}$) Dann

$$\frac{2-3x}{4x+5} \geq 2 \Leftrightarrow 2-3x \geq 2(4x+5) \Leftrightarrow -8 \geq 11x \Leftrightarrow x \leq -\frac{8}{11}$$

2. Fall $4x+5 < 0$ ($x < -\frac{5}{4}$)

$$\frac{2-3x}{4x+5} \geq 2 \Leftrightarrow 2-3x \leq 2(4x+5) \Leftrightarrow -8 \leq 11x \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{11}$$

Zusammengefasst (wegen $-\frac{5}{4} < -\frac{8}{11}$):

$$\frac{2-3x}{4x+5} \geq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\left(x > -\frac{5}{4} \wedge x \leq -\frac{8}{11}\right)}_{-\frac{5}{4} < x \leq -\frac{8}{11}} \vee \underbrace{\left(x < -\frac{5}{4} \wedge x \geq -\frac{8}{11}\right)}_{\text{nicht erfüllbar}}$$

Die Lösungsmenge (für diese Aufgabe) ist $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{4} < x \leq -\frac{8}{11}\} = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{8}{11}\right]$

$$\mathbb{L} = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{8}{11}\right]$$

- Löse $|x-5| < 2$: Fall 1.

$$\text{Es gilt } |x-5| < 2 \Leftrightarrow (x-5 \geq 0 \wedge x-5 < 2) \vee (x-5 < 0 \wedge -x+5 < 2)$$

$$\Leftrightarrow (5 \leq x \wedge x < 7) \vee (x < 5 \wedge 3 < x)$$

$$\Leftrightarrow x \in [5, 7[\vee x \in]3, 5[\Leftrightarrow x \in]3, 7[$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| < 2\} =]3,7[$$

- Allgemeiner gilt für $c \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$:

$$|x-c| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$$

Bemerkung: Alle diese Beispiele können durch Definition einer geeigneten Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, formulieren
Bestimme die Menge $\{x \in D \mid f(x) = 0\}$, $\{x \in D \mid f(x) \leq 0\}$
oder $\{x \in D \mid f(x) < 0\}$ explizit.

Gleichungssysteme mit mehreren Variablen

Beispiele: Bestimme $x, y \in \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{array}{ll} 3x + 2y = 9 & \textcircled{1} \\ 4x - y = 1 & \textcircled{2} \end{array}$$

Auflösen und Einsetzen:

- seien $x, y \in \mathbb{R}$ so dass $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ gelten



- wegen $\textcircled{2}$ gilt dann $y = 4x - 1$

- Da $\textcircled{1}$ gilt $3x + 2(4x - 1) = 9$ $\textcircled{1'}$

- $\textcircled{1'}$ bedeutet dass $11x = 11$ bzw $x = 1$ ist

- Und es folgt $y = 4 \cdot 1 - 1 = 3$

Gezeigt wurde:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} (3x + 2y = 9 \wedge 4x - y = 1) \Rightarrow (x = 1 \wedge y = 3)$$

Die Umkehrung: Wenn $x = 1$ und $y = 3$, dann gilt $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$
überprüft man durch Einsetzen

Insgesamt haben wir Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ gezeigt, nämlich $(x, y) = (1, 3)$

•

$$\begin{aligned}x - 3y &= 2 \\ -2x + 6y &= 3\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$ in die erste Gleichung ergibt sich $x - 3(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = 2 \Leftrightarrow \nexists$

Es gibt keine Lösung des Gleichungssystems

•

$$\begin{aligned}x - 3y &= 2 \\ -2x + 6y &= -4\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $y = \frac{-4+2x}{6} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$ in die erste Gleichung ergibt sich $x + 2 - x = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \Leftrightarrow \checkmark$

Gesagt ist

$$\left. \begin{aligned}x - 3y &= 2 \\ -2x + 6y &= -4\end{aligned} \right\} \xLeftrightarrow \text{durch Einsetzen} y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$$

Insgesamt: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 2 \wedge -2x + 6y = -4\} = \{(x, -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x) : x \in \mathbb{R}\}$$

In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen, parametrisiert durch die reellen Zahlen.

Bemerkung: Veranschaulichung in der xy-Ebene:

• Jede einzelne Gleichung hat als Lösungsmenge eine Gerade

