

Kap 6 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Beispiel: Gleichungssystem in ober Dreiecksform
(spezielle Zeilen-Stufen-Form)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 - 4x_3 = -4$$

$$-5x_3 = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 2 - x_2 - 2x_3 = \frac{12}{5} \\ x_2 = -4 + 4 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{8}{5} \\ x_3 = \frac{3}{5} \end{array} \right\}$$

Tabellarisch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array} \right)$$

"Rücksubstitution"

Allgemein: m Gleichungen für n Variablen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$, $b_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, m$.

Bemerkung: Durch elementare Zeilenumformungen bleibt die Lösungsmenge unverändert:

- Vertauschen der Reihenfolge der Gleichung ("Zeilentausch")
- Multiplizieren einer Gleichung mit einer beliebigen Zahl $\neq 0$
- Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen.

Das Verfahren um auf obere Dreiecksform zu kommen heißt Vorwärtselimination:

- Ist $a_{11} \neq 0$, so kann das $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ -fache der ersten Gleichung von der zweiten abgezogen werden. Dasselbe für Zeile 3 bis n :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + a'_{22}x_2 + \dots & + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & + a'_{m2}x_2 + \dots & + a'_{mn}x_n & = & b'_m \end{array}$$

- Ist $a'_{22} \neq 0$,^{so} verfährt man mit der zweiten Spalte ab der 2. Zeile genauso.
- Wenn alles gut geht, erhält man obere Dreiecksform.
- Ist der geforderte Koeffizient $= 0$, so tauscht man mit einer Gleichung unterhalb, deren Koeffizient $\neq 0$ ist.
Ist dies nicht möglich, dann geht man zur nächsten Spalte.

Bemerkung Vorwärtselimination zusammen mit Rückwärtssubstitution nennt man den Gauß-Algorithmus.

Beispiele: $x_1 + x_2 = 1$ ① $x_1 + x_2 = 1$ $x_1 + x_2 = 1$ $-1 \cdot 2$
 $2x_1 - x_2 = 5$ ② : -20 $0 - 3x_2 = 3$ $\left(-\frac{1}{3} \right)$ ②' $x_2 = -1$
 $x_1 + 0 = 2$ Lösung: $x_1 = 2, x_2 = -1$

Schematisch:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

• $m=3, n=3$: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$
 $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$
 $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$

Rücksubstitution

Vorwärtselimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array} \right)$$

• Im Fall $m < n$ nennt man das Gleichungssystem unterbestimmt:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$$

schematisch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_1 + x_2 + 0 = -1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_1 = -1 - x_2$$

$$x_3 = 1$$

Die Lösungsmenge hier ist

$$\{ (-1 - x_2, x_2, 1) : x_2 \in \mathbb{R} \} \in \mathbb{R}^3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{vorw}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad 0=1 \text{ Widerspruch}$$

Somit hat das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3$$

keine Lösung

Matrizenrechnung

Eine $m \times n$ -Matrix ist eine rechteckige Tabelle von (reellen) Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

Die Einträge heißen Koeffizienten der Matrix.

Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ schreibt man auch

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \pi & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ist eine } 2 \times 3\text{-Matrix, } A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Definition: Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, also $A = (A_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$, $B = (B_{ij})$

Dann ist die Matrixsumme von A und B , $A+B$, definiert

als: $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$ das λ -fache von A , λA ,

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda (A_{ij})$$

Beispiele:

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\bullet 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Definition Matrixmultiplikation Seien $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

dann ist das Matrixprodukt AB (manchmal auch $A \cdot B$) eine $l \times n$ -Matrix, definiert durch

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{jk} = A_{i1} B_{1k} + \dots + A_{im} B_{mk}$$

Achtung! Das Matrixprodukt AB ist nur definiert, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 7 \\ 5 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot 1 & 5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 38 \\ 23 & 61 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \quad 3 \times 2 \quad 2 \times 2$

Satz (Rechenregeln für Matrizen) Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $A + B = B + A$ (kommutativ)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (assoziativ)
- $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$ (distributiv)

Bemerkung: Matrixmultiplikation ist ^{ich} nicht kommutativ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rechenregeln gelten auch für nicht quadratische Matrizen, falls definiert

Spezialfall einspaltige Matrizen (Spaltenvektoren)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

Dimensions: $\underbrace{m \times n}_{m \times 1} \cdot \underbrace{n \times 1}_{n \times 1} = m \times 1$

Die Matrixgleichung $Ax=b$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$