

Kap 7. Folgen und Reihen

Schreibweisen und Beispiele

Eine Zahlenfolge ist ein mathematisches Objekt!

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit gegebener Funktionsvorschrift, eine reelle Zahlenfolge. Die Funktionswerte der Folge heißen

Folenglieder und werden statt $a(n)$ meistens bezeichnet

mit a_n . Die Folge selbst wird selten mit a sondern als

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet. Spezifiziert wird eine Funktion, z.B.:

„Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ “.

Eine Folge wird so spezifiziert:

„Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ “.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt auch harmonische Folge. Man ^{kann} sie auch durch $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$, oder $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$, aber nicht ^{durch} $(1, \frac{1}{2}, \dots)$ bezeichnen.

Beispiele:

• Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{2n+3}{3n-1}$, also $a_1 = \frac{5}{2}, a_2 = \frac{7}{5}, \dots, a_{1000} = \frac{2003}{2999}$,

• Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $a_1 = 2, a_2 = \frac{9}{4}, a_3 = \frac{64}{27}, a_4 = \frac{625}{256}, \dots$

- Die Folge $(-1)^n_{n \in \mathbb{N}} = (-1, +1, -1, +1, \dots)$

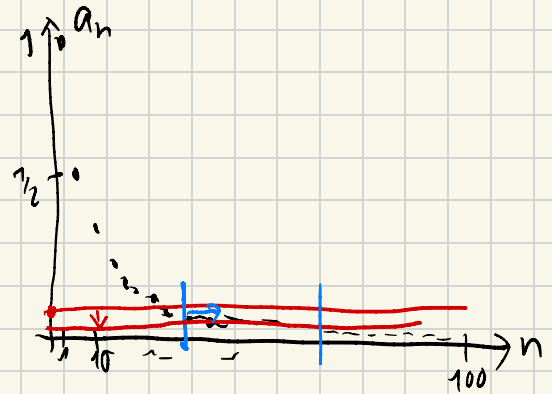
- Die Folge $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}_0} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$

- Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ (rekursive Defn)

Es gilt: $a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2} = 1.5, a_3 = \frac{17}{12} = 1.4166\dots,$

$a_4 = \frac{577}{408} \approx 1.4142157, \dots$

Konvergenz von Zahlenfolgen



Anschaulich:

„die Folgenglieder a_n nähern sich beliebig nahe an die Null für immer größere n an“

oder

„die a_n streben gegen 0 für n gegen unendlich“

oder „die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0“

„die Folge $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge“

Definition Nullfolge Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann eine Nullfolge wenn es zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$.

Beispiele:

• $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge (Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig)
Für ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt für alle $n \geq N$
 $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

• Genauso ist $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge.

• $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\left(\frac{2n+3}{3n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sind keine Nullfolgen.

Vermutlich konvergiert $\frac{2n+3}{3n-1}$ gegen $\frac{2}{3}$.

Definition (Konvergenz einer Folge)

Ein reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent gegen $c \in \mathbb{R}$, wenn die Folge $(a_n - c)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Man schreibt dann $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Bsp: Beh: $\frac{2n+3}{3n-1} \rightarrow \frac{2}{3}$

$$\text{Bew: } \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} = \frac{3(2n+3) - 2(3n-1)}{3(3n-1)} = \frac{9+2}{9n-3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$$

• Die Folge $(-1)^n$ ist nicht konvergent, denn für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(-1-c, +1-c, -1-c, +1-c, \dots)$ keine Nullfolge.

Für „nicht konvergent“ sagt man auch „divergent“

Bem $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ ist eine Formel mit Wahrheitswert wahr oder falsch

Wenn (a_n) nicht konvergent ist, dann ist der Term $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ undefiniert

soll dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ falsch sein.

undefiniert

Was ist der Wahrheitswert von

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n}_{\text{undef}} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} n}_{\text{undef}} \quad ?$$

unbestimmt.

Für Folgen, die als gebrochen rationale Funktionen von n gegeben sind ist die Grenzwertbestimmung einfach ($a_p \neq 0, b_q \neq 0, p, q \in \mathbb{N}_0$)

$$\frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{falls } p < q \\ \frac{a_p}{b_p} & \text{falls } p = q \\ \pm \infty & \text{falls } p > q \end{cases}$$

Satz (Grenzwertkalkül) Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b, a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$
- wenn $b \neq 0$, dann $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$
- wenn $a_n \geq 0, a > 0$ oder $b > 0$, dann $(a_n)^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^b$

Bemerkung: Nicht immer anwendbar: $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}, (1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e = 2.71\dots$

$$\begin{array}{c} \downarrow +\infty \quad \downarrow -\infty \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array}$$

$$\text{Es gilt: } \frac{2^{4n+1} (n!)^4}{(2n)! (2n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi \quad (\text{schwierig})$$

Reihen

Gegeben eine Folge von Summanden $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Was soll $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ bedeuten?

Wir betrachten Teilsummen

$$s_1 := a_1$$

$$s_2 := a_1 + a_2$$

$$s_3 := a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$s_n := a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

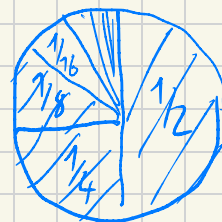
Wenn der Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: s$ existiert, so schreibt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

und sagt, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent (gegen s)

Beispiele

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



allgemeiner: für $|q| < 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots = +\infty \text{ (divergiert)}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots =: e \approx 2.71828 < 3$$