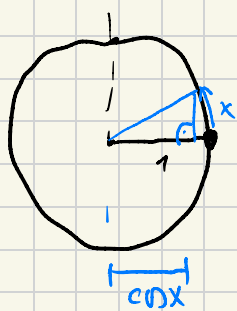
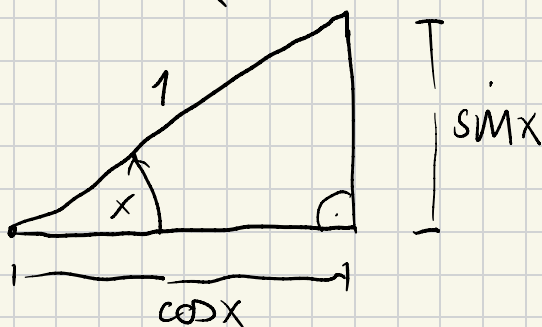


Kap 10. Sinus und Cosinus

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$\sin x$



x in Bogenmaß :

$$\pi = 180^\circ \text{ (Halbkreis)}$$

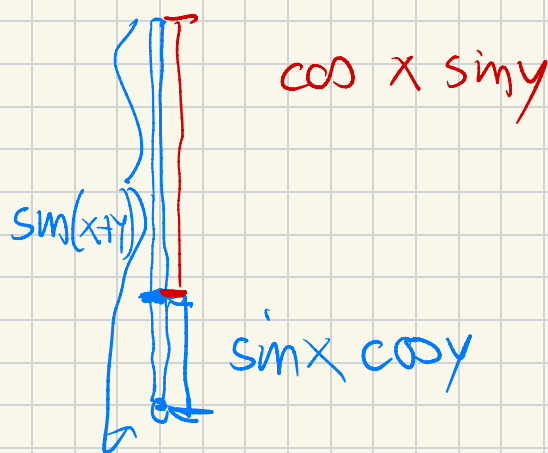
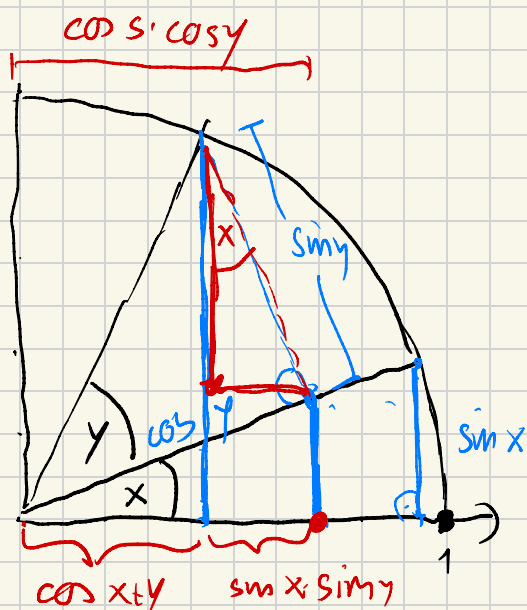
$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ \left(= 90 \cdot \frac{\pi}{180} \right)$$

$$\frac{\pi}{180} = 1^\circ$$

° steht für $\cdot \frac{\pi}{180}$

genauso wie

% steht für $\cdot \frac{1}{100}$



$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

} für alle $x, y \in \mathbb{R}$

Additionstheorem

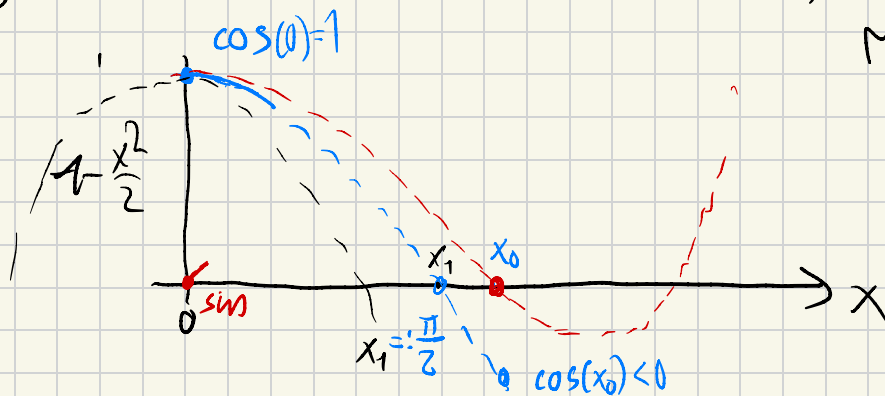
$$\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

sin und cos sind differenzierbar:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} = \sin x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} + \cos x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

genau so: $\cos'(x) = \dots = -\sin(x)$

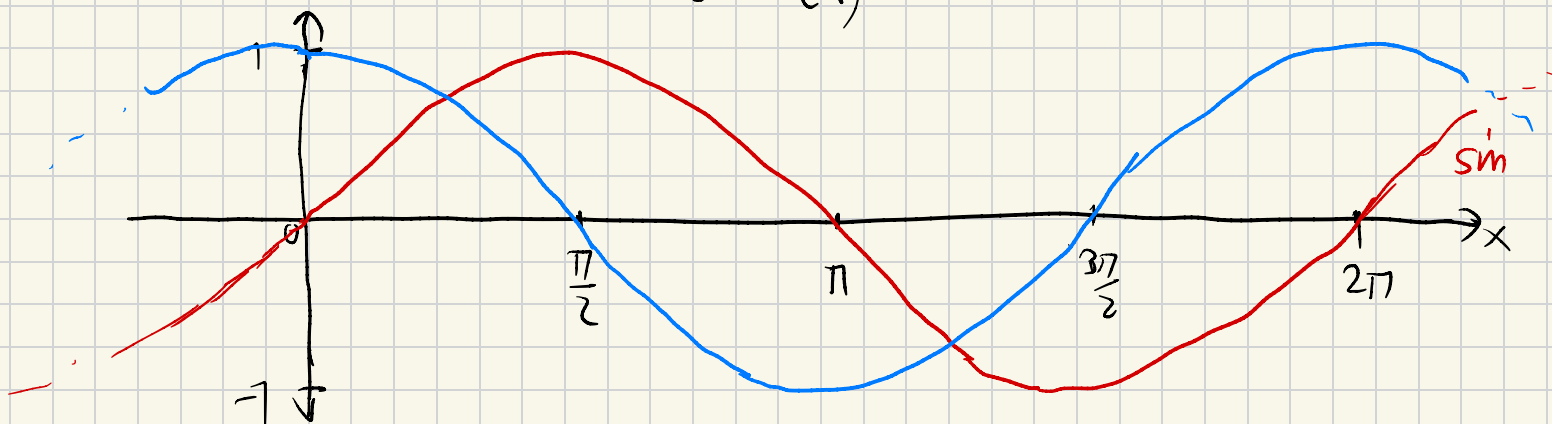


Man kann zeigen, dass
 $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

kleinste Nullstelle $x_1 > 0$
 definiert $\pi := 2x_1$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} + \cos x \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$



Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(\sin^2 x = (\sin(x))^2)$$

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \dots = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

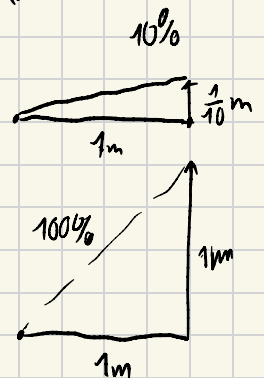
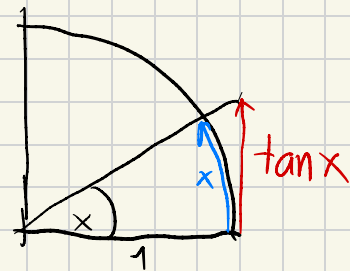
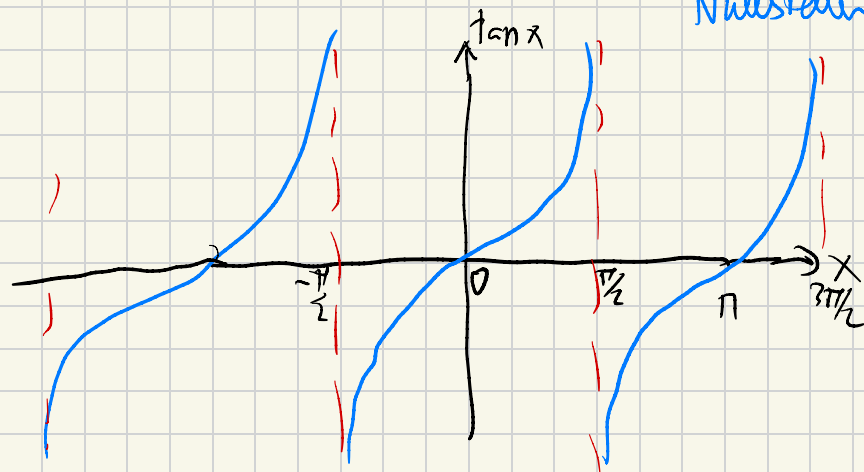
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} & x \in [0, 2\pi] \\ \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} & x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Schwebung oder Interferenz:

$$t \mapsto \sin(xt) + \sin(yt) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}t\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}t\right)$$

Tangens: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}}_{\text{Nullstellen des cos}} \rightarrow \mathbb{R}$$

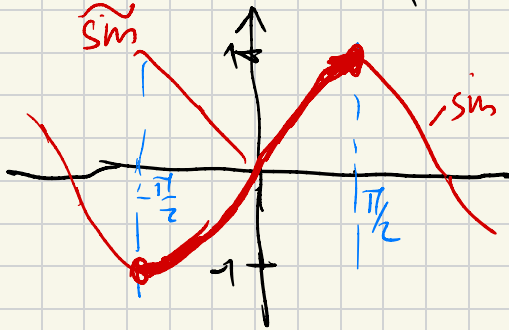


$$\tan'(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad (= 1 + \tan^2(x))$$

Arcus-Funktionen:

$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv



Die Einschränkung

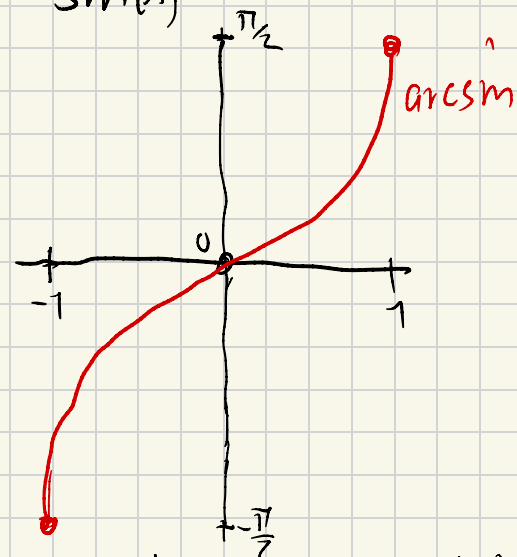
$$\widetilde{\sin}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\widetilde{\sin}(x) = \sin(x)$$

ist bijektiv

$$\arcsin := (\widetilde{\sin})^{-1}$$

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

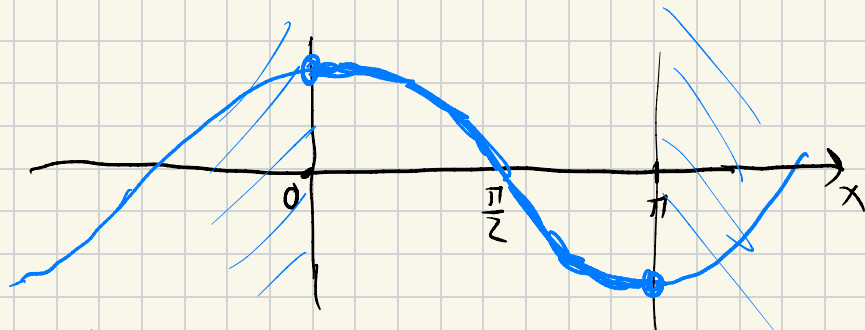


Es gilt $(\widetilde{\sin} \circ \arcsin)(y) = y$
Kettenregel

$$1 = \text{id}'_{[-1,1]}(\widetilde{\sin} \circ \arcsin)'(y) \stackrel{!}{=} \underbrace{\widetilde{\sin}'(\arcsin(y))}_{\cos(\cdot)} \cdot \arcsin'(y) = \underbrace{\cos(\arcsin(y))}_{\sqrt{1 - \widetilde{\sin}^2(\arcsin(y))}} \cdot \arcsin'(y)$$

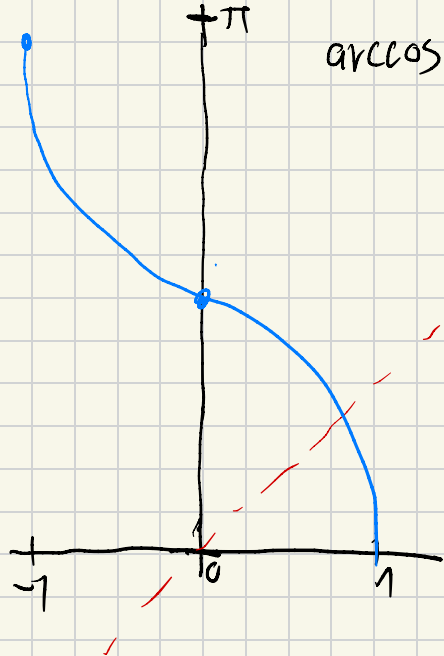
$\Rightarrow$ Für $y \in]-1, 1[$ gilt $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

• $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
weder inj. noch surj.



$\widetilde{\cos}: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $\widetilde{\cos}(x) = \cos(x)$, ist bijektiv

$$\arccos := \widetilde{\cos}^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



$$\arccos(y) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(y), \quad y \in [-1, +1].$$

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos(y))} = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}$$

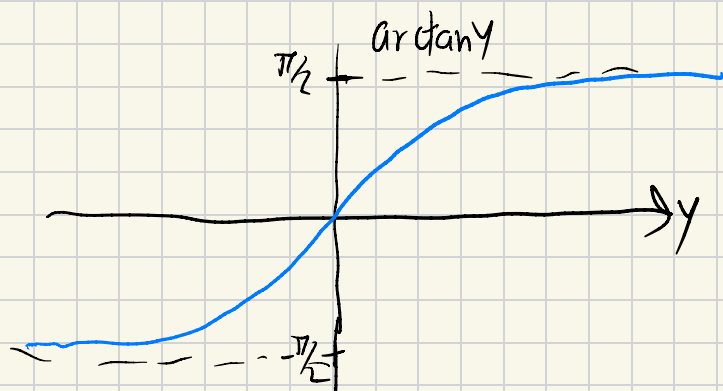
für $y \in]-1, +1[$

Arcustangens:

$$\widetilde{\tan}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \widetilde{\tan}(x) = \tan,$$

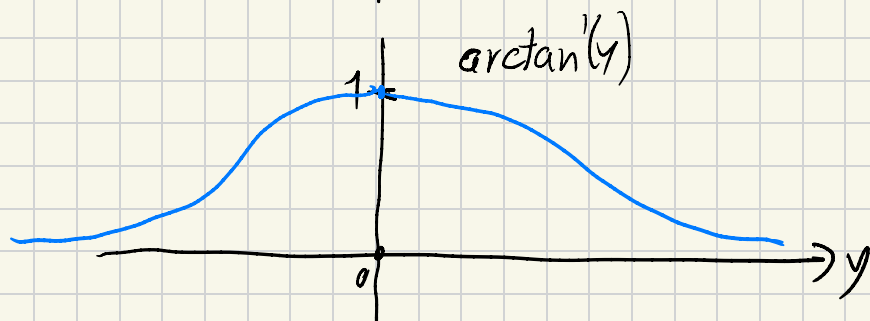
$$\arctan: (\widetilde{\tan})^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ist bijektiv



$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}$$



Reihendarstellung von sin und cos

$$\sin x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)!} x^{2h+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \dots$$

$$\cos x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)!} x^{2h} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \dots$$

Bemerkungen:

- Beide Reihen konvergieren für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Die so definierten Funktionen erfüllen die Additionstheoreme und die Anfangswerte von sin und cos

- Mit komplexen Zahlen (Kap 14) und Exponentialfunktion können sin und cos einfacher aufgeschrieben und bewiesen werden.