

Kap. 11. Norm, Skalar- und Vektorprodukt

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- Ein n -Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ ist eine andere Schreibweise für eine Funktion $x: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}, x(i) = x_i$
 $i=1, \dots, n$
- Weitere Schreibweise: Spaltenvektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

- Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine $n \times 1$ Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \text{ Zu jedem } X \in \mathbb{R}^{n \times 1} \text{ gibt es genau ein } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \text{ Man schreibt } \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n \times 1}$$

"Es gibt eine offensichtliche strukturerhaltende Bijektion zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n \times 1}$ "

- Die Schreibweise

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ benutzt man für kartesische Koordinaten (Punkte im Raum)

- Bei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ hat man das Bild eines Vektors vom Ursprung $(0, \dots, 0)$ bis zum Punkt $(v_1, \dots, v_n)$ vor Augen (z.B. Geschwindigkeitsvektor)

Geometrie des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Definition Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das ^(standard) Skalarprodukt von v mit w , $v \cdot w$ oder $\langle v, w \rangle$, definiert als

$$v \cdot w = \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n \in \mathbb{R}$$

Gilt $\langle v, w \rangle = 0$, so schreibt man $v \perp w$ (v steht senkrecht zu w)
(v ist orthogonal zu w)

Eigenschaften des Skalarprodukts Für $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \langle v, \lambda w \rangle = \lambda \cdot \langle v, w \rangle \\ & \langle v, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle \end{aligned} \right\} \quad \text{(linear)}$$

$$\text{(ii)} \quad \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \text{(symmetrisch)}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & \langle v, v \rangle \geq 0 \\ & \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(positiv definit)} \end{aligned}$$

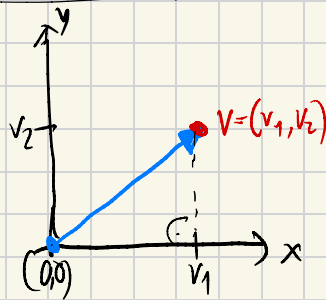
Bemerkungen:

- aus (ii) folgt, dass wenn v senkrecht auf w steht, dann steht auch w senkrecht auf v .

- (iii) besagt: Der Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der einzige, der senkrecht auf sich selbst steht.

Länge eines Vektors, Norm

Bsp: Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



Der Abstand des Punktes (v_1, v_2) zum Ursprung, bzw. die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist gleich

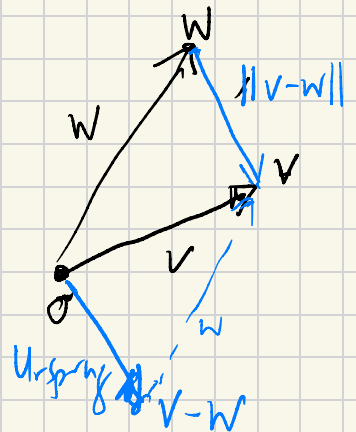
$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Definition • Für $v \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

die (euklidische) Norm von v

- Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißt $\|v - w\|$ der Abstand zwischen v und w .

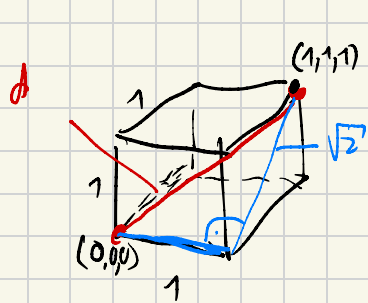


- Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|=1$ heißt (auf Eins) normierter Vektor

Beispiele

- Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|=1\} =: S^1$ heißt der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$

- Raumdiagonale im Würfel des $\mathbb{R}^3$



$$d = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

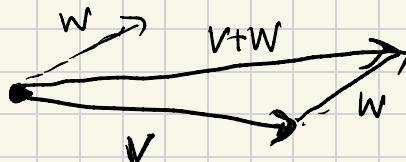
(Im $\mathbb{R}^{10^6}$ hat die Raumdiagonale die Länge $\sqrt{\underbrace{1+\dots+1}_{10^6 \text{ mal}}} = 1000$)

Eigenschaften der Norm:

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(ii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)



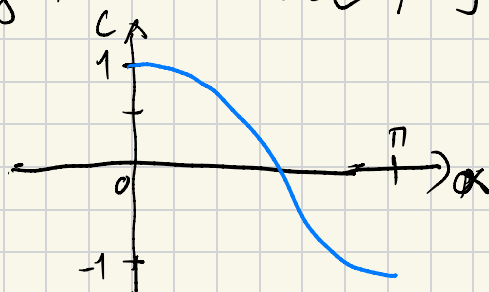
(iii) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Bemerkung: Wegen (iii) gilt für $v, w \neq 0$

$$-1 \leq \underbrace{\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}}_{=: c} \leq 1$$

Zu gegebenen $c \in [-1, 1]$ gibt es genau ein $\alpha \in [0, \pi]$,
s.d. $\cos \alpha = c$ ist,

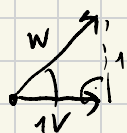
bzw. $\alpha = \arccos c$.



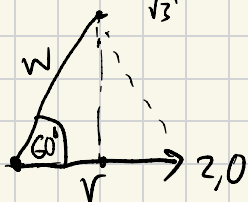
Der Winkel α wird als der Winkel zwischen v und w , $\angle(v, w)$, bezeichnet. Es gilt

$$\angle(v, w) = \arccos \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \in [0, \pi] = [0^\circ, 180^\circ]$$

Beispiele: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\angle(v, w) = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \arccos \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$



• $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. $\angle(v, w) = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \arccos \frac{2}{2 \cdot 2} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$



Bemerkung: $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stehen also genau dann senkrecht aufeinander, wenn

$$\angle(v, w) = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Vektorprodukt

Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ definiert man den Vektor

$$v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man nennt ihn das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt) von v mit w .

Es gilt: (i) $v \times w \perp v$, $v \times w \perp w$

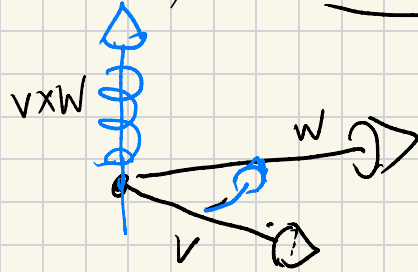
(ii) $\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin \angle(v, w)$

$\underbrace{\angle(v, w)}_{\in [0, \pi]} \geq 0$

(iii) $v, w, v \times w$ bilden (falls $v \times w \neq 0$) ein Rechtssystem



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Weitere Eigenschaften: $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

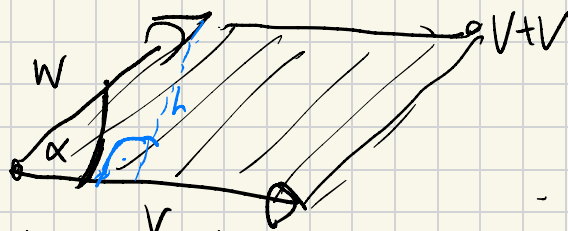
(i) $v \times w = -w \times v$

(ii) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$

(iii) $(u \times v) \times w \stackrel{\text{i.A.}}{\neq} u \times (v \times w)$

Aber (baccab) $\underbrace{a \times (b \times c)}_{\mathbb{R}^3} = \underbrace{b(a \cdot c)}_{\mathbb{R}^3} - \underbrace{c(a \cdot b)}_{\mathbb{R}^3}$ (liegt in der von b und c aufgespannten Ebene)

• $v, w \in \mathbb{R}^3$ spannen ein Parallelogramm in $\mathbb{R}^3$ mit Ecken $0, v, v+w, w$ auf



Fläche des Parallelogramms ist

$$\|v\| \cdot \|w\| \underbrace{\sin \alpha}_{\neq(v,w)} = \|v \times w\|;$$

die Norm des Vektorprodukts.