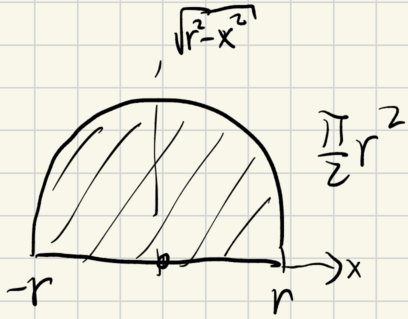
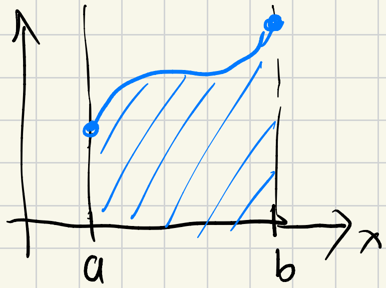
Kap 13 Integration

Historisch

Flächenbestimmung: Halbkreis



Verallgemeinerung: Fläche unter dem Graphen einer Funktion

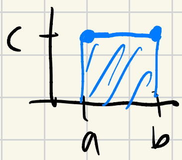


$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

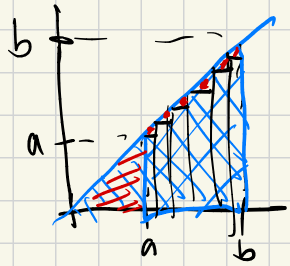
Fläche: $\int_a^b f(x)\,dx$

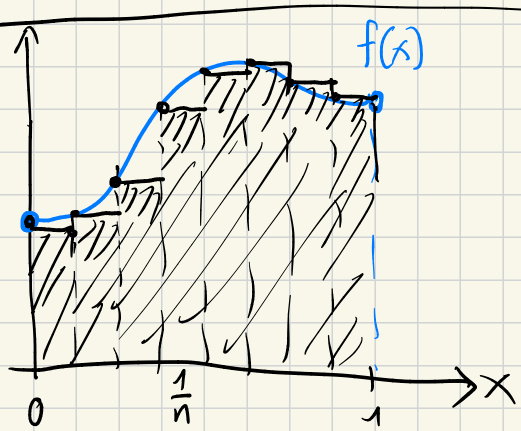
Beispiele

- $f(x)=c$ $\qquad \int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$



- $f(x)=x$ $\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$





$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}}_{\int_0^1} \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{n}}_{dx}$$

Summe

Definition Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann heißt

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{Integrand}} := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}}_{\text{Riemannsumme}} \in \mathbb{R}$$

das <u>(Riemann-)Integral über f von a bis b.</u>

Bsp:
$$\int_a^b x\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\underbrace{\frac{a(b-a)}{n}}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot k\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{a(b-a)}{n}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}k}_{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$$
$$= a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

"Integration ist die Umkehrung der Differentiation"

Definition: Gilt für $f,F:[a,b]\to\mathbb{R}$, dass
$$F'=f \quad (\text{"f ist die Ableitung von F"})$$
so sagt man <u>"F ist Stammfunktion von f"</u>

$(A\subseteq B \Leftrightarrow B\supseteq A)$

Bsp: $F(x)=x\ln x,\ x>0$, ist eine Stammfunktion von $f(x)=\ln x+1$

Bemerkungen:

- F ist Stammfunktion von f, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow F+c$ ist Stammfkt von f.
- F, G Stammfunktionen von $f \Rightarrow F-G$ ist konstant.

"F ist Stammfkt von f" informell: "$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{unbestimmtes Integral}} = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$"

Bsp: Die Stammfkt von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$

kurz: "$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$"

Satz (HDI): Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig:

(i) Ist F eine Stammfkt von f, dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{=: \left[F(x)\right]_{x=a}^{b}}$$

(ii) $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ für $x \in [a,b]$ ist eine Stammfkt von f.

Bem: (i) hilft einige Integrale zu berechnen (wenn Stammfkt des Integranden explizit bekannt ist)

(ii) garantiert, dass es immer eine Stammfkt (zu f stetig) gibt.

Beispiele:

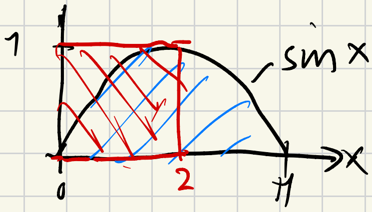
- nochmal $f(x)=x$. Dann ist $F(x)=\frac{x^2}{2}$ Stammfkt (auf ganz $\mathbb{R}$) von f. $\left(\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+c\right)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{x=a}^{b} = F(b)-F(a) = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$$

- $f(x)=\sin x$ auf $[0,\pi]$. Stammfkt $F(x)=-\cos x$.

Somit ist

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{x=0}^{\pi} = -(-1)-(-1)=2$$



Partielle Integration

Stammfkt von $f\cdot g$, wenn F Stammfkt von f.

$\boxed{\text{NR: } (Fg)' = fg + F\underbrace{g'}}$ und H Stammfkt von $F\cdot g'$,

ist $F\cdot g - H$. $\boxed{\text{NR: } (Fg-H)' = fg+Fg'-F\cdot g' = f\cdot g}$

Somit ist

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[F(x)g(x)\right]_{x=a}^{b} - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx}$$

Finde H

Bsp: • $\int_0^1 \underbrace{e^x}_{\substack{f(x)\\F(x)=e^x}}\cdot\underbrace{x}_{\substack{g(x)\\g'(x)=1}}\,dx = \left[e^x x\right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 e^x\cdot 1\,dx = e^1\cdot 1 - e^0\cdot 0 - \left[e^x\right]_{x=0}^{1}$

$$= e-(e^1-e^0) = 1$$

• $\int_1^{x} \underbrace{1}_{f(x)}\cdot\underbrace{\ln x}_{g(x)}\, dx = \left[x\ln(x)\right]_{x=1}^{x} - \int_1^{x} x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - 1\cdot\ln(1) - (x-1)$ $\quad x\geq 1$

$F(x)=x,\; g'(x)=\frac{1}{x}$

$= x\ln x - x + 1$

Substitutionsregel

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit Stammfkt F.

$\varphi:[c,d]\to[a,b]$ stetig differenzierbar (d.h. φ' ist stetig)

Dann gilt:

$$\int_c^d \underbrace{f(\varphi(s))\,\varphi'(s)}_{(F\circ\varphi)'(s)=F'(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)}\,ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx \quad \left(= F(\varphi(d))-F(\varphi(c))\right)$$

Beweis

Es gilt: $\int_c^d f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \left[F\circ\varphi(s)\right]_{s=c}^{d} = F(\varphi(d))-F(\varphi(c))$

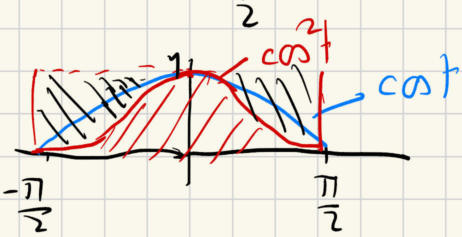
$= \left[F(x)\right]_{x=\varphi(c)}^{\varphi(d)} = \int_{x=\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx$

Bspe.: $\int_0^{x} \underbrace{2x}_{\varphi'(x)}\, e^{\overbrace{x^2}^{\varphi(x)=x^2}}\,dx \underset{dy=2x\,dx}{\overset{y=x^2}{=}} \int_{0^2}^{x^2} e^y\,dy = \left[e^y\right]_{y=0}^{y=x^2} = e^{x^2}-1$

$f(x)=e^x$

• $\int_{-1=\sin(-\frac{\pi}{2})}^{1=\sin\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)=\cos t}{\overset{x=\varphi(t)=\sin t}{=}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t}\,\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$

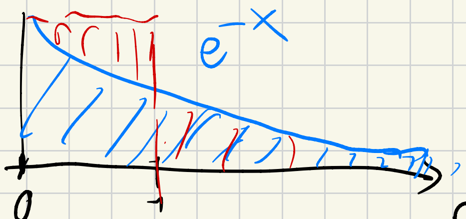
$\overset{\text{part.Int.}}{=} \dots = \frac{\pi}{2}$ ✓



$\int \underbrace{\cos t}_{f(t)}\;\underbrace{\cos t}_{g(t)}\,dt$

Uneigentliche Integrale

Bsp.:



Gesamtfläche?

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{R} = \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-R}-(-1)\right) = 1$$