

Kap. 14 Komplexe Zahlen

Motivation

- Was ist $\sqrt{-1}$? Gibt es eine Zahl i mit $i \cdot i = -1$?

Dann könnte man $\sqrt{-1} := i$ schreiben

und $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$ (Check $(2i)^2 = 4i^2 = -4$)

Dann ist

$$(2+i)^2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2i + \underbrace{i^2}_{-1} = 3 + 4i$$

$$(2+i)^3 = (2+i)(3+4i) = 6 + 3i + 8i - 4 = 2 + 11i \\ = 2 + 11\sqrt{-1}$$

- Lösen von kubischen Gleichungen (Cardano-Formel):

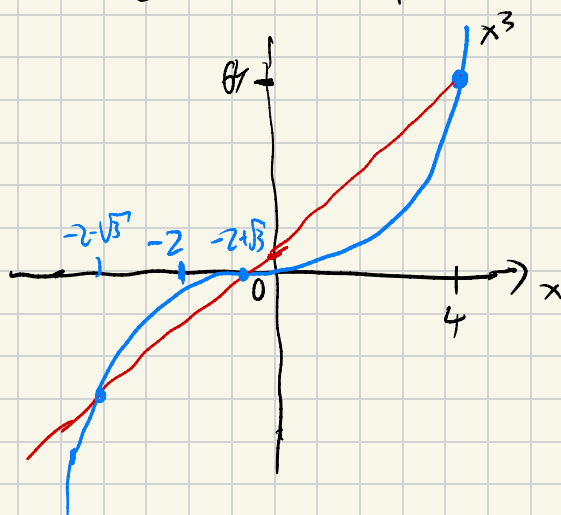
Eine Lösung von $x^3 = 3ax + 2b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

ist $x = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}}$

Bsp: $x^3 = 15x + 4$

($a=5, b=2$). Dann ist

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11i} \\ = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4 \quad (\checkmark) \quad = (2-i)^3$$



$$(x^3 - 15x - 4) : (x - 4) = x^2 + 4x + 1$$

weitere Nullst: $-2 \pm \sqrt{3}$

- Wenn i eine Zahl ist, dann $i+i=2i$, $-i$, $1+i$, $\frac{1}{i}$, ...

• Achtung: $-1 = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} \neq \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$

Definition Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} := \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2$$

$x+iy \longleftrightarrow (x, y)$

Addition und Multiplikation komplexer Zahlen:

$$(x+iy) + (u+iv) := (x+u) + i(y+v)$$

$$(x+iy) \cdot (u+iv) := \underbrace{(x \cdot u - y \cdot v)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{(xv + yu)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{C}$$

Bemerkungen:

- Für $z \in \mathbb{C}$ gibt es (x, y) , so dass $z = x+iy$.
generelles Paar in $\mathbb{R}^2$

Dann ist $\operatorname{Re} z := x$ der Realteil von z

$\operatorname{Im} z := y$ der Imaginarteil von z

Die Abb. $\operatorname{ReIm} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\operatorname{ReIm}(z) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \in \mathbb{R}^2$
 ist die Umkehrabbildung von $(x, y) \mapsto x+iy$.

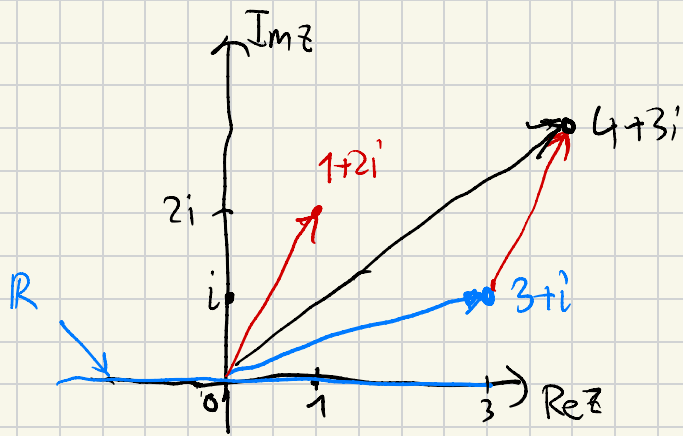
- Die reellen Zahlen sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\} = \{x+iy \mid x \in \mathbb{R}, y=0\},$$

denn es gilt $(x+i0) + (u+i0) = (x+u) + i \cdot 0 = x+u$

$$(x+i0) \cdot (u+i0) = (x \cdot u - 0 \cdot 0) + i(x \cdot 0 + 0 \cdot u) = x \cdot u$$

Die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C} (\cong \mathbb{R}^2)$



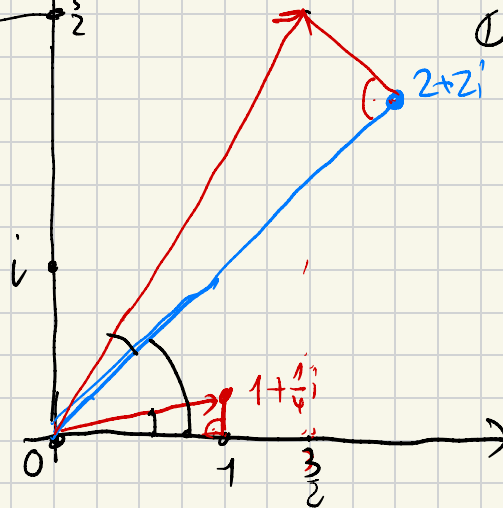
$$(3+i) + (1+2i) = 4+3i$$

Addition in $\mathbb{C}$ entspricht
Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$

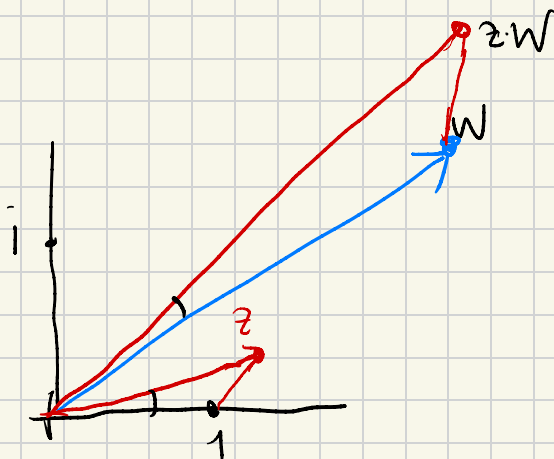
Bemerkung: Reelle Zahlen können in ihre Größe verglichen werden. Komplexe Zahlen abseits der reellen Achse sind keine "Größen", die man vergleichen kann, sondern Zahlen, mit denen man rechnen kann.

Multiplikation

Bsp:



$$(2+2i)(1+\frac{1}{4}i) \\ = (2-\frac{1}{2}) + (2+\frac{1}{2})i = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$$



Multiplikation komplexer Zahlen:
"Winkel addieren sich,
Längen werden multipliziert"

Definitionen. Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$).

Dann heißt $\bar{z} := x - iy$ die zu z konjugierte Zahl,
und $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ der Betrag von z
(Abstand vom Ursprung)

Bemerkungen:

• Für $x \in \mathbb{R}$, $x = x + i0$, ist

$$\underbrace{|x + i0|}_{\text{komplexer Betrag}} = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{für } x \geq 0 \\ -x, & \text{für } x < 0 \end{cases} = \underbrace{|x|}_{\text{reeller Betrag}}$$

• Für $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, ist

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0$$

Rechenregeln: $z, w \in \mathbb{C}$

• $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

• $|zw| = |z| \cdot |w|$

• $|z + w| \leq |z| + |w|$

• $|z| - |w| \leq |z - w|$

(Dreiecksungleichung)
("umgekehrte Dreiecksungl.")

• $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

• $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

• $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

• $\bar{i} = -i$, $|i| = \sqrt{i \cdot \bar{i}} = \sqrt{i \cdot (-i)} = \sqrt{1} = 1$

Division Was ist $\frac{1}{i}$? Es muss $i \cdot \frac{1}{i} = 1$ gelten
Es gilt $i \cdot (-i) = 1$

Also folgt $\boxed{\frac{1}{i} = -i}$!

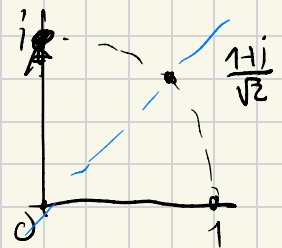
Allgemein für $a+ib \neq 0$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

Im Allgemeinen: "Nenner reell machen durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen des Nenners": $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$

Existenz von Wurzeln

Finde $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$

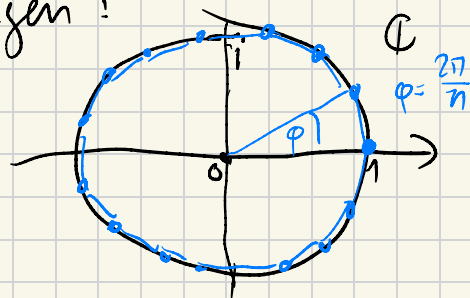


Ansatz: $z = a+ia$, $a \in \mathbb{R}$

$$(a+ia)^2 = a^2(1+i)^2 = a^2(1+i^2+2i) = 2a^2i = i \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z^2 = i \Leftrightarrow z = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Bemerkung: Die Gleichung $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen:



Diese bilden ein regelmäßiges n -Eck auf dem Einheitskreis

• Fundamentalsatz der Algebra:

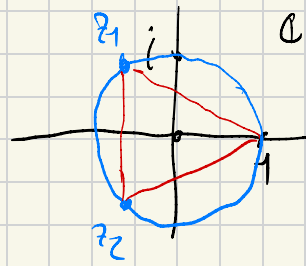
Jedes nicht konstante Polynom

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

$n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ (höchstens n)

Bsp: $z^2 + z + 1 = 0$ hat Lsgn

$$z_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Eulerformel: $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \dots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right)}_{=\cos y} + i \underbrace{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right)}_{=\sin y} \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

$$y = \pi \quad \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$