6. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Beispiele:

(1)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Lösungen ?

Auflösen + Einsetzen ?

(2)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 0x_1 + x_2 - 4x_3 &= -4 \\ 0x_1 + 0x_2 - 5x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$\rightarrow x_3$ $\quad \rightarrow x_2$ $\quad \rightarrow x_1$

Lösung: $\quad x_3 = \frac{3}{5}, \quad x_2 = -\frac{8}{5}, \quad x_1 = \frac{12}{5}$

Beobachtung: Lineare Gleichungssysteme in „Zeilenstufenform" kann man schnell lösen.

In der Tat kann *jedes* lineare Gleichungssystem durch die so genannten **elementaren Zeilenumformungen** in Zeilenstufenform gebracht werden, ohne dass sich die Lösungsmenge dabei ändert.

Diese elementaren Umformungen sind:

- Vertauschen von Gleichungen („Zeilen")
- Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$
- Addieren des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen.

Beispiel (3)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 5 \end{aligned} \quad \cdot(-2) \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 - 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\{(2,-1)\}$

Ökonomische Schreibweise:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \cdot(-2) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Zurück zu Beispiel (1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \cdot(-2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \boxed{3} & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array}\right) \quad \cdot(-3)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_1$$

Allgemein:

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

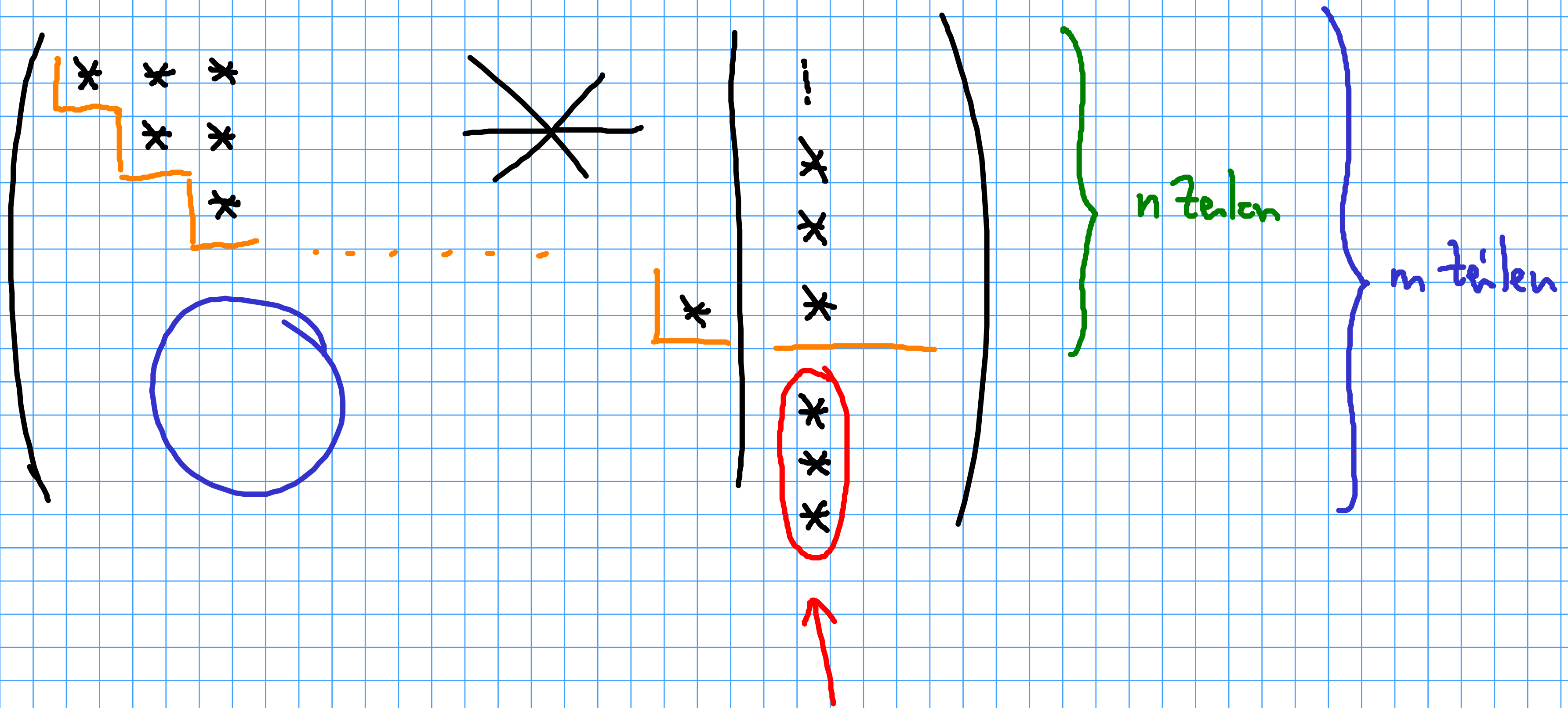
entspricht

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 & \vdots & & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

Koeffizientenmatrix A

erweiterte Koeffizientenmatrix $A|b$

elementare Zeilenumformungen →



Wenn hier Zahlen ≠ 0
stehen bleiben,
gibt es keine Lösung

ander Fall $m < n$

z.B. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ d.h. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

Hier gibt es unendlich viele Lösungen. Wähle x_3 beliebig und finde „passendes" x_1 und x_2 dazu.

<u>Bemerkung</u>: Auch im Fall $m < n$ ist denkbar, dass keine Lösung existiert, z.B.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Bezeichnungen: Eine Matrix („rechteckiges Schema") mit m Zeilen und n Spalten nennt man $m \times n$ – Matrix (mit Einträgen aus $\mathbb{R}$)

Die Menge aller solchen Matrizen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ oder $\mathbb{R}^{(m,n)}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Rechnen mit Matrizen: Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Schreibweise $A = (a_{ij})$ „das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix A heißt a_{ij}"

$B = (b_{ij})$

Wir setzen $A+B := (a_{ij} + b_{ij})$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $\lambda A := (\lambda a_{ij})$

Beispiele: (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & \pi \\ 7 & 3 \\ 1/2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2+\pi \\ 10 & 7 \\ 11/2 & 12 \end{pmatrix}$$

(2)

$$3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Matrix-Multiplikation

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times \boxed{n}}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{\boxed{n} \times k}$

Das Matrix-Produkt $C = A \cdot B$ ist die Matrix $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times k}$

mit

$$c_{ij} := \sum_{l=1}^{\boxed{n}} a_{il} b_{lj}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 38 \\ 23 & 61 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 13$

$2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 38$

„Zeile mal Spalte"

Rechenregeln: Seien A, B, C Matrizen (so, dass folgende Summen und Produkte sinnvoll sind). Dann gilt

(1) $$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

(2) $$(A+B) \cdot C = AC + BC$$

(3) $$A(B+C) = AB + AC$$

Achtung! Im Allgemeinen ist $AB \neq BA$

Spezialfall: „Matrix-Vektor-Multiplikation"

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$n \times 1$ - Matrix (gesucht)

Ein lineares Gleichungssystem ist eine Gleichung der Form $Ax = b$

$m \times n$ - Matrix

$m \times 1$ - Matrix