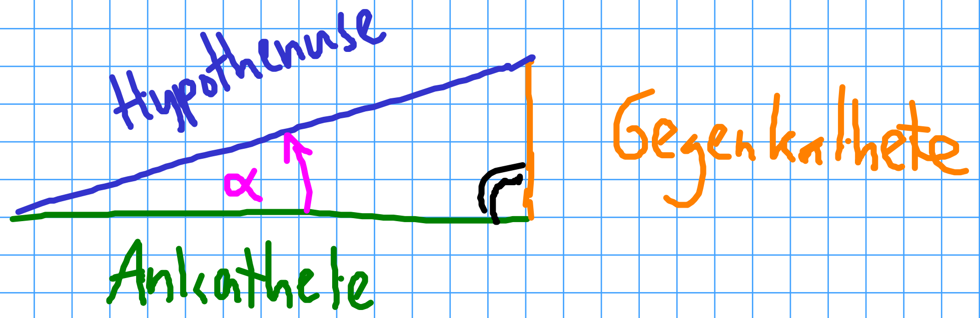
10 Sinus und Cosinus

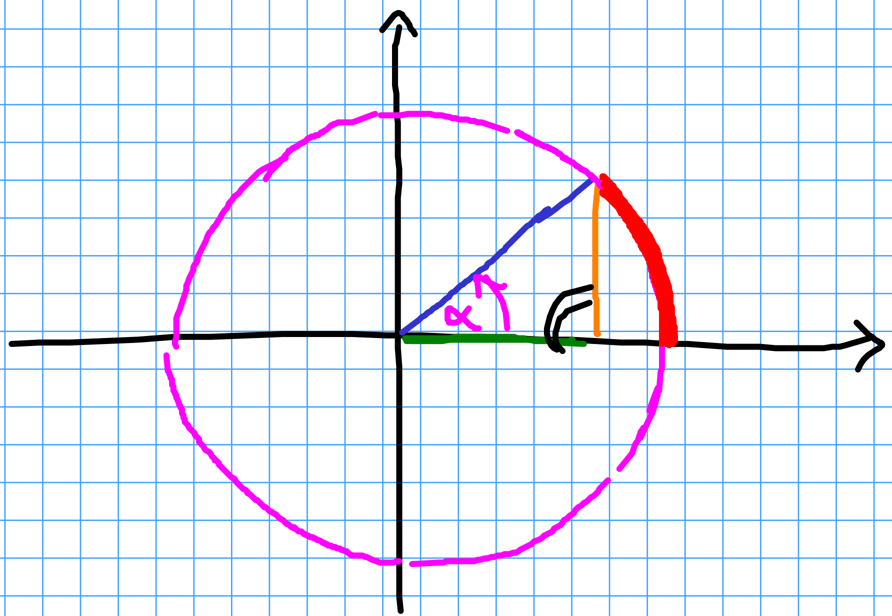
Klassische Definition über Verhältnis der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck



Als $\sin\alpha$ bezeichnet man den Quotienten $\dfrac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypothenuse}}$

Als $\cos\alpha$ bezeichnet man den Quotienten $\dfrac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypothenuse}}$

Grafisch im Fall Länge der Hypothenuse = 1 :



Länge = $\sin \alpha$

Länge = $\cos \alpha$

Die Länge des Kreisbogens ist ein Maß für den Winkel α

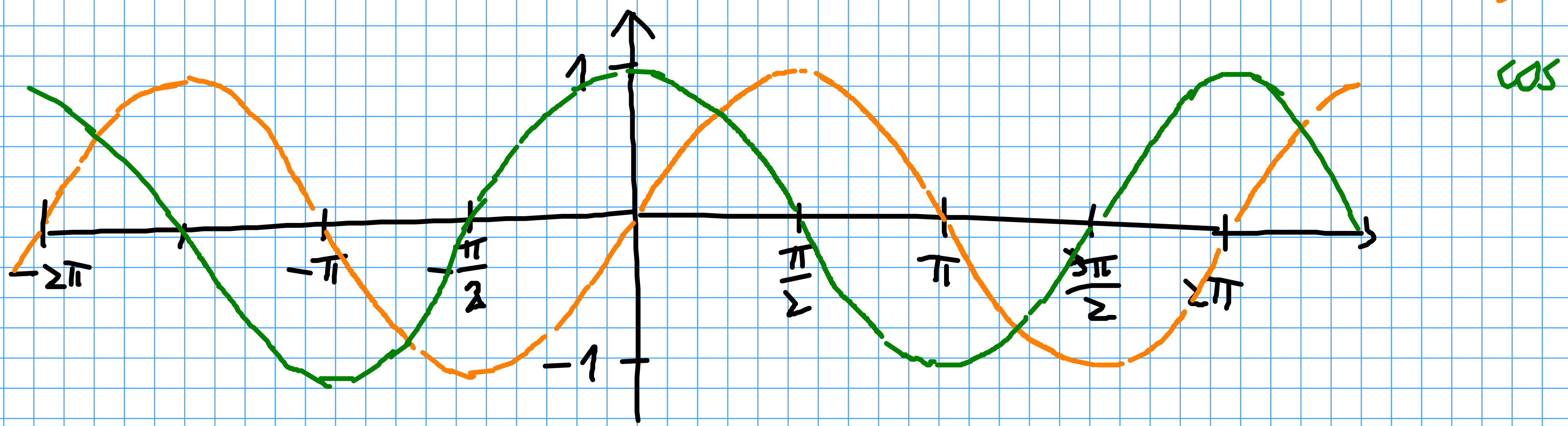
Der Umfang des gesamten Kreises hat die Länge 2π

$$90° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{2} \qquad 45° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{4}$$

Wir wollen sin und cos als Funktionen $\mathbb{R} \to [-1,1]$ auffassen.

Den Winkel geben wir dabei im Bogenmaß (siehe oben) an.

Damit ergibt sich folgendes Bild



Wichtige Identitäten: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x) \qquad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$\sin^2 x$ ist Abkürzung für $(\sin(x))^2$

Satz (Additionstheoreme): Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Wichtige Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Nun können wir sin und cos ableiten : Es gilt

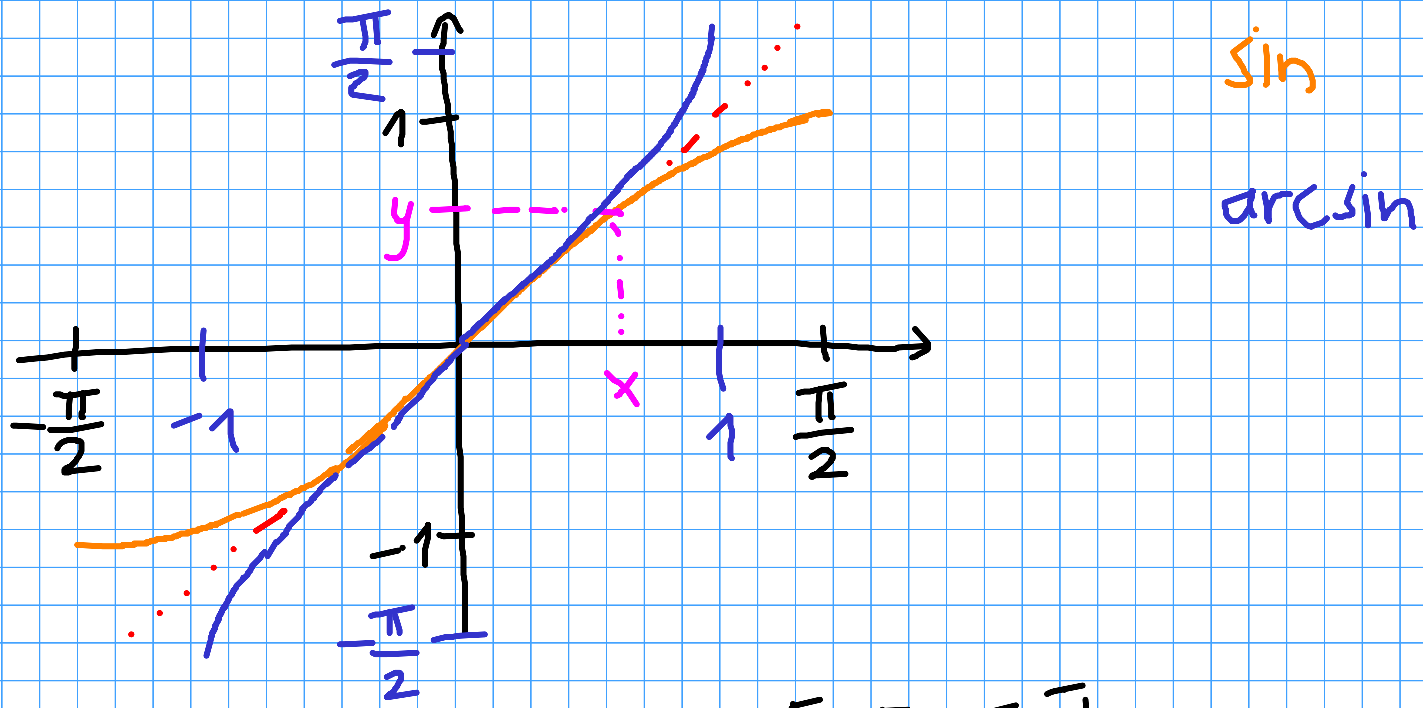
$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \sin(x)\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0} + \cos(x)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \xrightarrow{h\to 0} \cos(x)$$

Damit haben wir $\sin' = \cos$

Eine ähnliche Rechnung ergibt $\cos' = -\sin$

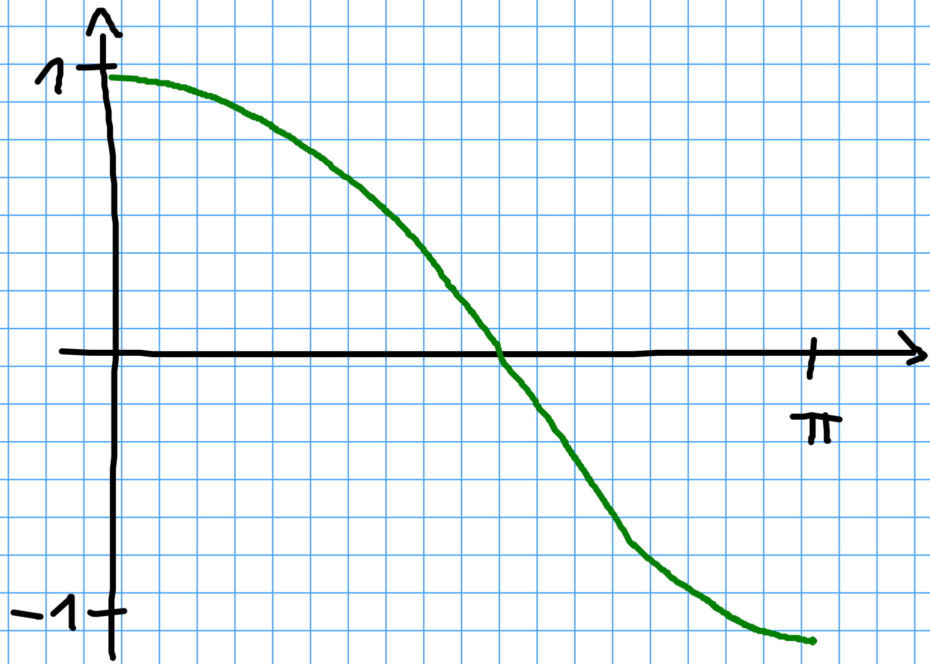
sin bildet das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bijektiv auf $[-1,1]$ ab



Zu jedem $y \in [-1,1]$ gibt es genau ein $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sodass $y = \sin(x)$ ist. Wir schreiben $x = \arcsin(y)$

Es gibt viele $x \in \mathbb{R}$, für die $\sin(x) = y$ gilt – aber nur eines in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

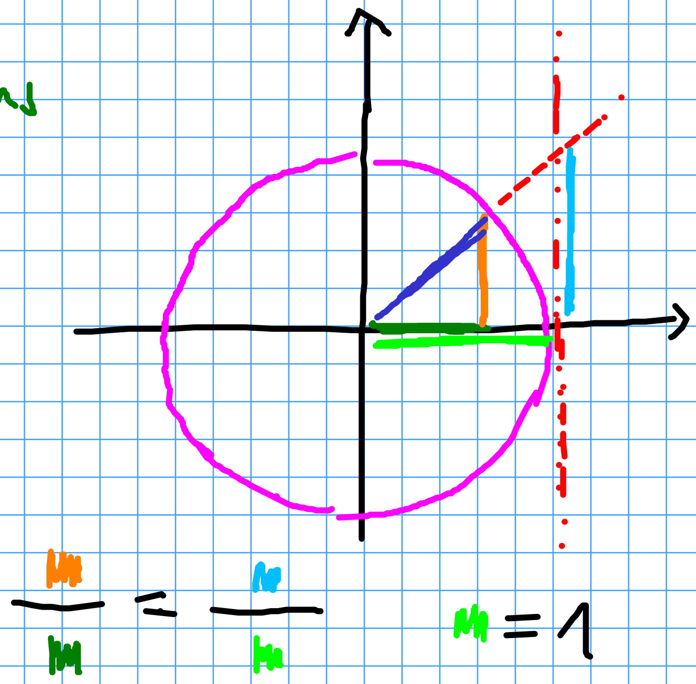
cos bildet $[0,\pi]$ bijektiv auf $[-1,1]$ ab

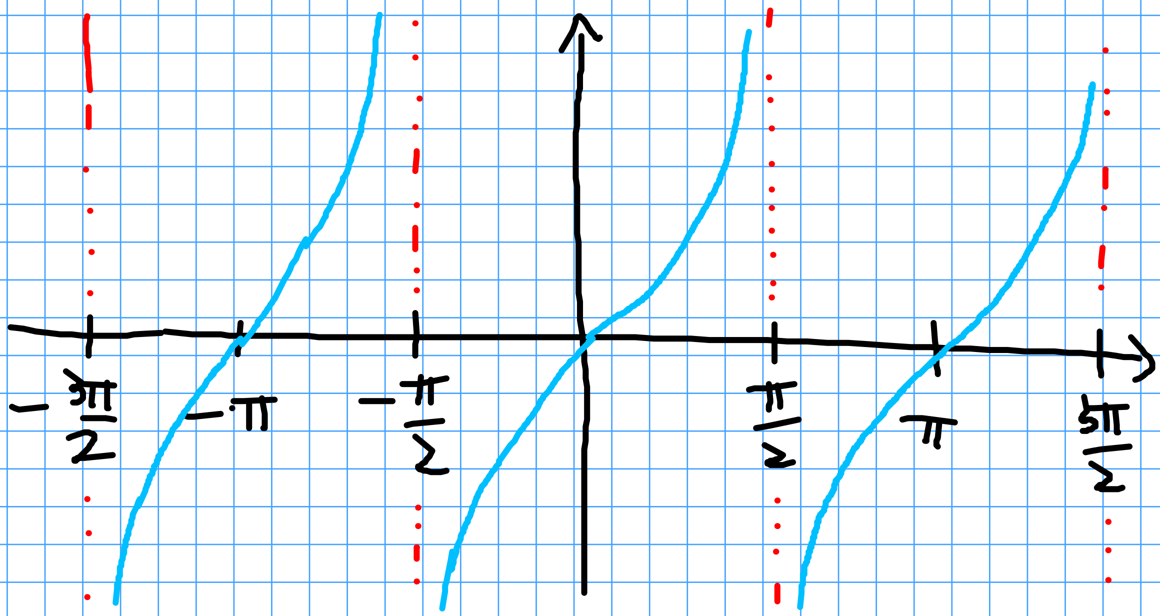


<u>Bemerkung</u>: $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in (-1,1)$

Tangens Für $x \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}_{\text{Nullstellen des Cosinus}}$

setzt man $\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$





Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\sin'(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

<u>Reihendarstellung</u> : Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - + \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - + \dots$$

In der Analysis ($\rightarrow$ 1. Semester) benutzt man diese Reihen um die Funktionen sin und cos zu <u>definieren</u>. Man muss sich dann allerdings klar machen (<u>beweisen</u>!) warum diese abstrakt definierten Funktionen mit dem übereinstimmen, was man sich anschaulich unter Sinus/Cosinus vorstellt.

Zurück zu $\frac{\sin(x)}{x}$

Für $x \neq 0$ ist
$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - + \cdots\right)$$
$$= 1 \underbrace{- \underbrace{\frac{1}{6}x^2}_{\xrightarrow{x\to 0}\ 0} + \underbrace{\frac{1}{120}x^4}_{\xrightarrow{x\to 0}\ 0} - + \cdots}_{\xrightarrow{x\to 0}\ 0}$$

darf man das?