12 Exponentialfunktion und Logarithmus

Motivation:

- radioaktiver Zerfall: Die Anzahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Teilchen ist proportional zur Anzahl der momentan vorhandenen Teilchen.
- Wachstum von Populationen: Die Anzahl der „Geburten" pro Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der momentan vorhandenen Lebewesen.

Was passiert im Grenzwert „Länge der Zeiteinheit $\to 0$" ?

Interpretiert man den „Zuwachs" als Ableitung der momentanen Größe, so stößt man auf folgendes Problem:

Gibt es eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad ?$$

<u>Antwort</u>: ja! Wenn man zusätzlich fordert, dass $f(0) = 1$ gilt, gibt es genau eine solche Funktion: Die <u>Exponentialfunktion</u>.

<u>Idee</u>:

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

In der Tat ist diese Reihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergent (Beweis $\to$ Analysis 1)

Wenn man jeden einzelnen Summanden ableitet, erhält man wieder die selbe Reihe.

Geht das gut, obwohl wir unendlich viele Summanden haben? ($\to$ Analysis 1)

Definition: Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

heißt **Exponentialfunktion**.

Bemerkung: Es gibt eine Zahl e (die so genannte Eulersche Zahl), sodass

$$\exp(x) = e^x \quad \text{ist.}$$

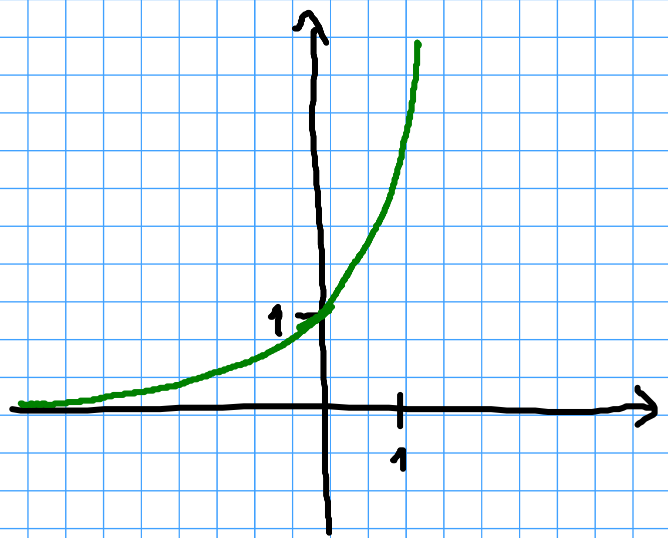
$$e \approx 2{,}718281828459\ldots$$

Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $e^{x+y} = e^x e^y$

Weitere Eigenschaften:

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^x > 0$
- $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$, $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$



Anmerkung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

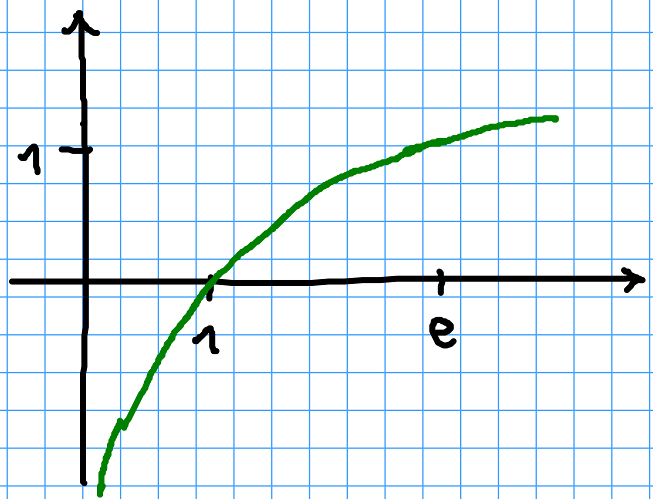
[speziell für $x = 1$ ist $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$]

Die Exponentialfunktion ist eine bijektiv Abbildung $\mathbb{R} \to (0,\infty)$

Die Umkehrfunktion bezeichnet man den (natürlichen) Logarithmus

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \ln(e^x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \quad \text{für alle } x \in (0,\infty)$$



Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhält man die Funktionalgleichung des Logarithmus

Für alle $x, y \in (0,\infty)$ gilt $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Bemerkung: Es gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

zurück zu **Potenzen**: Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$

Für $a \neq 0$ definiert man $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$

Für $a \geq 0$ definiert man $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$

Damit sind wir in der Lage zu erklären, was mit a^x gemeint ist, falls $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Was ist a^x, falls $x \notin \mathbb{Q}$, also falls x <u>nicht</u> von der Form $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ist?

Zunächst im Fall $a=e$

(1) Die Zahl, die man erhält als
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

(2) Man zeigt, dass $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ für $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$

$\sqrt[n]{e^m}$

(3) Die Reihe rechts konvergiert auch für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(4) <u>Definiere</u> $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$

Mittels Logarithmus können wir allgemeine Potenzen erklären:

Sei $a>0$ und $x \in \mathbb{R}$: Wir setzen $\boxed{a^x := e^{x \ln(a)}}$

Beispiel: $2^3 = e^{3\ln(2)} = e^{\ln(2)+\ln(2)+\ln(2)} = e^{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2)} = 2 \cdot 2 \cdot 2$

Zurück zu den Reihen:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \mp \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \mp \dots$$

Zusammenhang von Exponentialfunktion und Sinus / Cosinus ?

Mittels komplexer Zahlen ersichtlich (→ Kap 14)

Weitere Grenzwerte :

(haben wir schon genannt:)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

„Nenner groß genug" um Konvergenz zu erhalten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{5}}_{>\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{>\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{>\frac{1}{8}} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \frac{1}{9} + \dots$$

divergent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{=\frac{5}{6}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \pm \dots < \frac{5}{6}$$

$$\overset{?}{\cancel{=}} \underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{=\frac{5}{6}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}}_{>0} ++- \dots > \frac{5}{6}$$

In der Tat konvergiert obige Reihe gegen $\ln(2)$ und die untere gegen $2\ln(2)$